Fabrizio Agnello

La memoria fotografica dell'architettura

Restituzioni prospettiche e ricostruzioni

FORME DEL DISEGNO

FORME DEL DISEGNO
Collana diretta da Elena Ippoliti, Michela Rossi, Edoardo Dotto

La collana FORME DEL DISEGNO si propone come occasione per la condivisione di riflessioni sul disegno quale linguaggio antropologicamente naturale, al tempo stesso culturale e universale, e che indica contemporaneamente la concezione e l'esecuzione dei suoi oggetti.
In particolare raccoglie opere e saggi sul disegno e sulla rappresentazione nell'ambito dell'architettura, dell'ingegneria e del design in un'ottica sia di approfondimento sia di divulgazione scientifica.
La collana si articola in tre sezioni: PUNTO, che raccoglie contributi più prettamente teorici su tematiche puntuali, LINEA, che ospita contributi tesi alla sistematizzazione delle conoscenze intorno ad argomenti specifici, SUPERFICIE, che presenta pratiche ed attività sperimentali su casi studio o argomenti peculiari.

Fabrizio Agnello

La memoria fotografica dell'architettura

Restituzioni prospettiche e ricostruzioni

FORME DEL DISEGNO
Sezione
PUNTO

FrancoAngeli

A Marcella, mia maestra

Desidero ringraziare Stefano Piazza, Mirco Cannella, Marco Nobile e tutti i colleghi ‘disegnatori’ del mio Dipartimento per avere incoraggiato e sostenuto i miei studi sulla restituzione prospettica.
La Prof. Rosalia La Franca per avere creduto nelle mie capacità.
Il Prof. Michele Inzerillo per le sue illuminanti lezioni di geometria descrittiva.
Il Prof. Giuseppe Pagnano per il suo esempio.
Rita, Sara, Sofia, Paolo e Wall-e per il loro sostegno.

Indice

Prefazione

di Fabrizio Gay

Questo libro di Fabrizio Agnello è presentato con poche righe scritte da un altro Fabrizio della sua generazione che devono richiamare un terzo Fabrizio [F. I. Apollonio] tra quelli che nel lontano maggio 1993 frequentarono a Gibellina un seminario destinato a dottorandi di ricerca in Rilievo e Rappresentazione dell'ambiente costruito. Tra altre cose che gli studiosi della disciplina del disegno devono a Fabrizio Ivan Apollonio nei trent'anni intercorsi da allora c'è anche la lucida formulazione di una domanda centrale in quest'ambito di ricerca: "quanto possiamo fidarci della fedeltà referenziale di un modello?" Questa fiducia è misurabile in termini probabilistici?

La risposta sembra ovvia solo nei casi in cui è presente l'oggetto referente rappresentato da un modello (analogico o digitale che sia) e dunque può essere confrontato direttamente con la rappresentazione. In quei casi si può "vedere" subito quanto la rappresentazione assomiglia al referente dichiarato; ma ciò non può accadere in ogni ricostruzione archeologica, specie dove parti diverse del modello ricostruito sono il frutto di diversi processi inferenziali e congetturali, ciascuno con propri gradi d'incertezza legati anche ai differenti tipi di documenti addotti nella ricostruzione.

Quando accade che la ricostruzione di un certo manufatto perduto o non realizzato possa avvenire solo attraverso immagini fotografiche, o comunque grafici

assimilabili alla fotografia – ad esempio il ricalco di una scena traguardata attraverso una camera chiara o sul fondo di una camera oscura, o la restituzione da un grafico originario in prospettiva, o da un rendering digitale, o da un fotomontaggio, un dipinto, un video di guerra, … – allora s'impone il tema in cui s'iscrive questo libro di Fabrizio Agnello. Qui è trattato a fondo il tema dell'affidabilità dei paradigmi di restituzione basati sulle immagini, almeno quelle trattabili alla luce della teoria delle proiezioni centrali o, più in specifico, attraverso il problema geometrico inverso della prospettiva, oppure sulla stereo-proiezione e sulla geometria epipolare che fonda le odierne tecniche di rilievo digitale dette Structure from Motion*.*

I libri e i saggi che trattano la 'restituzione da fotografia/e' sembrano trattare argomenti diversi a seconda che i procedimenti riguardino una o più immagini in proiezione centrale, a seconda della tecnologia di ripresa e di rappresentazione delle immagini e a seconda che siano scritti da topografi, oppure da studiosi di geometria descrittiva, di fotogrammetria, o da storici della rappresentazione, da architetti di professione, o da informatici, oppure da pubblicitari delle applicazioni per il raddrizzamento fotografico o per la fotomodellazione, oppure da insegnanti. Non è facile dare di questo tema una trattazione sia divulgativa, sia professionale, sia scientifica, sia applicativa. Si corre sempre il rischio di affastellare argomenti di natura topografica e altri di natura fotogrammetrica, di spendere molte pagine nel trattare astratti fondamenti geometrico proiettivi della teoria delle proiezioni centrali, o, all'opposto, di limitarsi alle formule della fotogrammetria analitica, o di dare semplici illustrazioni del workflow *di un dato software, senza spiegarne il funzionamento geometrico.*

Questi rischi sono sempre in agguato in un libro come questo che è esplicitamente indirizzato a un pubblico ampio, non necessariamente specialista, specie considerando il fatto che la restituzione prospettica e la fotomodellazione sono esercizi di enorme valore anche per l'apprendimento del disegno a mano libera o con mezzi digitali. Il tema della restituzione fotografica sembra trattabile in senso tecnico in ambiti molto specifici, assai diversi e specialistici, mentre una sua trattazione didattica richiederebbe un approccio unitario ai diversi orientamenti. Un approccio didattico unitario del tema si scontra con il diverso tipo di geometrie implicate. Anche se il tema viene delimitato alla fotogrammetria elementare (a singolo fotogramma), può essere sviluppato almeno in due modi opposti: da un lato metodi orientati alla resa grafica di configurazioni piane in vera forma – scomposizione di una prospettiva in prospettività tra piani –, dall'altro lato metodi orientati alla diretta modellazione digitale in 3D, perciò detti di 'fotomodellazione'. Entrambi questi orientamenti si spiegano sempli-

cemente come conseguenze della teoria delle proiezioni centrali; esistono però metodi che fanno riferimento a teorie geometriche assai diverse. Un orientamento diverso dai precedenti è quello implicato nelle tecniche di restituzione digitale automatizzata dette Structure from Motion *che, partendo da relazioni epipolari tra serie di coppie e terzetti di immagini fotografiche dello stesso oggetto, pervengono (per ridondanza) a calcolare l'orientamento interno ed esterno di ogni fotografia. L'esito finale del* workflow *automatizzato, in questo caso, è la ricostruzione in forma di mesh delle superfici significative dell'oggetto ritratto con la data e contigua serie di fotografie.*

Questo libro mostra come ci sia una complementarità tra questi approcci che spesso la letteratura indica come orientamenti diversi se non opposti. In questo libro Fabrizio Agnello è riuscito anche equilibrare l'approccio didattico generale a quello più applicativo e valutativo (professionale). C'è riuscito con la brillante idea di sviluppare un complesso ragionamento scientifico attraverso un semplice esempio didattico, un esempio ripreso nei diversi capitoli del libro. Con questa condotta umile e precisa, pragmatica, sobria ed economica, Agnello riesce a offrire una chiara spiegazione dei procedimenti tecnici della restituzione da foto in termini sia pratici, sia teorici, mantenendo un equilibrio tra il punto di vista topografico e quello fotogrammetrico.

Perciò il libro di Agnello non è un semplice ausilio didattico, anche se fin dalle prime pagine ci avvisa del fatto che "gli specialisti dovranno consolarsi al pensiero che questo libro non è stato scritto pensando a loro". A ben vedere, anche il lettore specialista e navigato trova in queste pagine di Agnello un approccio originale alla materia e ricco di novità interessanti, oltre che di fondamentali chiarimenti. È un libro scritto con amore di stringatezza e di chiarezza; perciò, l'autore non può che limitarsi a pochissimi accenni tra le righe all'ampiezza storica e tecnica della questione, rinviando in qualche passo alle bibliografie più idonee. Egli ha ridato vita e circolazione a un tema di ricerca che sembrava ormai esaurito o relegato al rango di eserciziario didattico.

A Maurilia, il viaggiatore è invitato a visitare la città e nello stesso tempo a osservare certe vecchie cartoline illustrate che la rappresentano com'era prima: la stessa identica piazza con una gallina al posto della stazione degli autobus, il chiosco della musica al posto del cavalcavia, due signorine col parasole bianco al posto della fabbrica di esplosivi. Per non deludere gli abitanti occorre che il viaggiatore lodi la città nelle cartoline e la preferisca a quella presente (...). Guardatevi dal dir loro che talvolta città diverse si succedono sopra lo stesso suolo e sotto lo stesso nome, nascono e muoiono senza essersi conosciute, incomunicabili tra loro (...); le vecchie cartoline non rappresentano Maurilia com'era, ma un'altra città che per caso si chiamava Maurilia come questa.

Italo Calvino, Città invisibili, 1972

Introduzione

Apro l'introduzione al libro con la Maurilia di Calvino, per ricordare a me stesso che la restituzione prospettica da fotografia e la ricostruzione virtuale di edifici perduti non ha nulla di nostalgico, né tantomeno aspira alla loro ri-edificazione, bensì all'arricchimento della memoria e allo studio dell'architettura.
Esistono diversi libri dedicati alla restituzione prospettica nella sua più ampia accezione, e altri dedicati esplicitamente alla restituzione prospettica da immagini fotografiche.
I motivi che hanno condotto alla scrittura di questo libro si sono formati nel corso di numerose sperimentazioni condotte in un decennio, che hanno dimostrato come l'applicazione di tecnologie digitali renda più accurato il processo di restituzione e permetta la ricostruzione di modelli delle opere raffigurate nelle fotografie.
La possibilità di rappresentare uno scenario complesso attraverso modelli tridimensionali è stata colta in primo luogo dall'industria cinematografica; le ambientazioni di film di grande successo come *Gladiator* e *Troy* sono il prodotto di sofisticate ricostruzioni tridimensionali. Anche l'industria culturale inizia a fare uso di modelli tridimensionali per la visualizzazione di ricostruzioni virtuali di edifici scomparsi: il campo di applicazione privilegiato, nell'ultimo ventennio, è stato il patrimonio archeologico di epoca antica e medievale.

L'approccio tridimensionale alla restituzione prospettica da immagini fotografiche, argomento principale di questo studio, è un riflesso di questa generale tendenza all'uso di modelli.
Nell'epoca pre-digitale, la restituzione prospettica da fotografie era raramente utilizzata, per almeno due ragioni: l'eccessiva imprecisione, dovuta alle limitazioni intrinseche degli strumenti tradizionali del disegno e la difficoltà di restituire figure complesse. La restituzione con metodi tradizionali produceva figure piane (piante, sezioni, prospetti), attraverso il loro ribaltamento sul quadro.
Anche nella prima fase evolutiva della rappresentazione digitale, la restituzione prospettica è stata raramente utilizzata. Si intravedeva la possibilità di superare alcune significative limitazioni degli strumenti tradizionali, come la difficoltà di identificare e utilizzare punti di fuga molto distanti dal riquadro dell'immagine, ma il processo rimaneva ancorato alla restituzione di forme bidimensionali, data la complessità di gestione del processo in uno spazio tridimensionale.
L'attuale sviluppo degli strumenti di rappresentazione digitale rende molto più agevole trasferire il processo di restituzione nello spazio tridimensionale e permette di giungere alla ricostruzione di modelli digitali delle opere di architettura raffigurate nelle immagini.
La possibilità di eseguire la restituzione prospettica da fotografia in ambiente digitale, consente oggi di individuare con accuratezza anche i punti di fuga più distanti, osservare in dettaglio l'immagine e verificare nello spazio la congruenza proiettiva fra la fotografia e la scena ricostruita.
Si può facilmente intuire quale sia l'importanza di tale evoluzione: se un edificio non più esistente è stato fotografato prima della sua scomparsa, la restituzione prospettica permette di restituire le parti raffigurate nelle immagini, nella loro consistenza tridimensionale e con un'accuratezza impensabile nell'epoca pre-digitale. Il processo di restituzione è ovviamente condizionato dalla qualità delle immagini fotografiche e, anche in presenza di fotografie ad alta risoluzione, non può raggiungere i livelli di accuratezza tipici dei processi di rilievo fotogrammetrici e laser scanning.
I limiti di accuratezza del processo non diminuiscono la sua potenzialità per le finalità legate alla conoscenza e divulgazione del patrimonio culturale perduto: si pensi a tutti quegli edifici distrutti da catastrofi naturali o da eventi provocati dall'uomo (guerre, demolizioni) a partire dalla seconda metà del XIX secolo, quando la tecnica fotografica inizia a diffondersi.
La restituzione prospettica, come qualsiasi altra procedura fotogrammetrica, non può, da sola, restituire le dimensioni dei soggetti raffigurati, ma permette di ricostruirne un modello coerente privo di un riferimento dimensionale.

Affinché il processo di restituzione possa dirsi completo, occorre che nell'immagine sia raffigurato almeno un elemento di cui sia nota la dimensione, ovvero un elemento tutt'oggi esistente, che possa essere rilevato; la misura di tale elemento permetterà di scalare il modello ricostruttivo e renderlo così misurabile.
In quest'ultima evenienza, la restituzione prospettica digitale permette di posizionare con sufficiente accuratezza lo schema prospettico rispetto agli edifici rimasti *in situ*, e così ritrovare la posizione scelta dal fotografo per riprendere l'immagine. Tale opportunità, oltre a verificare la qualità della restituzione, si presta anche ad applicazioni legate alla fruizione dei modelli ricostruttivi.
In questi ultimi anni il processo di restituzione prospettica è stato utilizzato per la ricostruzione di numerose opere di architettura non più esistenti. Diverse applicazioni del metodo di restituzione sono state indirizzate alla ricostruzione di edifici e contesti urbani distrutti nello scorso secolo da disastrosi eventi sismici, come il terremoto di Messina del 1908 o quello della Valle del Belice del 1968. Altre volte è stata prodotta la ricostruzione di edifici demoliti da eventi bellici, in particolare a Palermo, o da programmi di trasformazione e rinnovamento urbano.
Gli studi condotti hanno permesso di ricostruire, a partire dalle immagini d'epoca, molti edifici non più esistenti e di risalire agli elementi spaziali che consentono di collocare le ricostruzioni nel contesto attuale dei luoghi.
Va ricordato, per completezza di informazione, che esistono da tempo software di fotogrammetria *Structure from Motion* (SfM) che permettono di ricostruire il modello di un artefatto, sotto forma di nuvola di punti o di modello di superficie a maglia triangolare (mesh), a partire da immagini fotografiche[1]. Questa tecnologia, estremamente efficace, richiede la disponibilità di numerose immagini, che riprendono la scena da diversi punti di vista; solo i punti riconoscibili in almeno tre immagini vengono restituiti.
Le potenzialità di questi strumenti non sono tuttavia applicabili in modo diretto all'ingente patrimonio di foto del XIX e XX secolo che documentano opere di architettura perdute e contesti urbani profondamente alterati, poiché, nella maggior parte dei casi, le opere e i contesti sono ritratti da uno o pochi punti di vista privilegiati. Le foto d'archivio si prestano solo in casi eccezionali alla restituzione con metodi stereoscopici o SfM; nella maggior parte dei casi, dunque la ricostruzione di edifici e contesti urbani scomparsi o drasticamente modificati può essere tentata solo utilizzando tecniche di restituzione prospettica[2].
La restituzione prospettica da immagini fotografiche è un tema difficilmente classificabile, poiché utilizza i principi della geometria descrittiva per produrre una restituzione fotogrammetrica.

Il suo duplice carattere l'ha resa scientificamente 'orfana': essa non viene minimamente menzionata nei trattati di fotogrammetria, mentre nei libri di geometria descrittiva viene brevemente menzionata come problema 'inverso' della prospettiva. Ai rari e preziosi scritti che hanno trattato la restituzione prospettica da fotografia è dedicato il capitolo che apre questo libro.
I capitoli successivi introducono il lettore agli elementi che strutturano una scena prospettica; si è deciso di non affrontare la trattazione come premessa necessaria ma noiosa alla restituzione, ma di legare fin dalle prime pagine la prospettiva alle immagini fotografiche. Il libro non presuppone un lettore dotato di una formazione pregressa, e per questo motivo tutte le nozioni di scienza della rappresentazione utili alla trattazione vengono sempre accompagnate da una pur sintetica illustrazione.
Un'ultima avvertenza al lettore: il libro non ha la presunzione di offrire nuovi strumenti metodologici o approfondimenti disciplinari. Intende semplicemente mettere a sistema nozioni abitualmente disaggregate, e rendere accessibili a un pubblico ampio le possibilità offerte dalla restituzione prospettica da fotografia con strumenti digitali di disegno e modellazione. Torna utile a questo proposito riportare una frase estratta dall'introduzione di Robert Hillenbrand al suo piccolo volume dedicato all'Arte Islamica: "*Specialists will have to console themselves with the thought that this book was not written with them in mind*[3]".

[1] Nel 2003 un gruppo di ricerca dell'ETH di Zurigo è riuscito a ricostruire tridimensionalmente le statue di Buddha di Bamiyan in Afghanistan, distrutte dai Talebani, elaborando con procedure fotogrammetriche le foto dei turisti in visita al sito sacro prima della devastazione. Lo sviluppo e la maturità dei software di fotogrammetria SfM hanno incoraggiato l'avvio di progetti come il BigSfM della Cornell University <http://www.cs.cornell.edu/projects/bigsfm/>, che si propone di utilizzare fotografie condivise sui social network per la restituzione 3D automatica di siti esistenti con tecniche SfM.
[2] Il raddrizzamento fotografico offre la possibilità di trasformare la proiezione prospettica di una figura piana in una proiezione parallela ortogonale che ne restituisce la vera forma; solo la restituzione prospettica permette di ricostruire un modello tridimensionale da una singola immagine.
[3] Robert Hillenbrand, *Islamic Art and Architecture*, Thames & Hudson, London 1999, p. 9.

1 La restituzione prospettica da fotografia. Excursus storico

La bibliografia sulla restituzione prospettica è molto vasta e include studi e ricerche che si sviluppano a partire dalla seconda metà del XVI secolo[1].
La breve rassegna che ci avviamo a presentare è rigorosamente circoscritta a quegli studi che affrontano in modo diretto il problema della restituzione prospettica da immagini fotografiche; rimangono dunque esclusi tanti preziosi testi che trattano la restituzione da prospettive disegnate nella sua ampiezza teorica e applicativa, ma senza riferimenti espliciti alla fotografia.
L'arco temporale della rassegna proposta si riduce quindi al periodo che segue la definizione della tecnica fotografica[2].
Gli studi sulla restituzione prospettica da fotografia possono essere classificati in tre gruppi, caratterizzati da protagonisti, ambiti disciplinari e finalità differenti. Al primo gruppo, che si colloca nello scorso secolo, con propaggini fino ai giorni nostri,

1 Per un ampio e dettagliato excursus storico sulla restituzione prospettica si rimanda al prezioso libro di Leonardo Paris, interamente dedicato all'argomento (Paris L., 2000).
2 Esiste un ampio consenso intorno alla scelta di datare la nascita della fotografia al 1839, quando la nuova 'tecnica per dipingere con la luce', sviluppata da Joseph Nicéphore Niépce (1765-1833) e da Louis Jacques Mandé Daguerre (1787-1851), fu presentata a Parigi da Jean François Dominique Arago, membro dell'Accademia di Scienze e Deputato.

appartengono gli studiosi che applicano i principi della geometria descrittiva per restituire, attraverso operazioni di ribaltamento sul piano dell'immagine fotografica, piante, prospetti e sezioni di opere di architettura.
Al secondo gruppo appartengono gli studiosi di ingegneria informatica che, nell'ultimo ventennio dello scorso secolo, hanno messo a punto strumenti semi-automatici per la restituzione di modelli tridimensionali da una singola immagine fotografica.
Al terzo e ultimo gruppo appartengono gli studiosi di scienza della rappresentazione che utilizzano strumenti di disegno e modellazione digitale per la determinazione dell'orientamento interno ed esterno delle immagini, e per la ricostruzione tridimensionale di manufatti architettonici da fotografie.

ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR DE LA PHOTOGRAPHIE.
(CONFÉRENCES DE LA SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE PHOTOGRAPHIE.)

LA
MÉTROPHOTOGRAPHIE,

PAR
Le Colonel A. LAUSSEDAT,
Membre de l'Institut,
Directeur du Conservatoire national des Arts et Métiers.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,
ÉDITEUR DE LA BIBLIOTHÈQUE PHOTOGRAPHIQUE,
55, Quai des Grands-Augustins.
1899
(Tous droits réservés.)

Fig. 1/ Aimé Laussedat, *La Metrophotographie*, Copertina.

Restituzione con costruzioni grafiche e ribaltamenti di figure piane

Nel 1899, sessant'anni dopo la presentazione ufficiale della fotografia, Aimé Laussedat (1819-1907), professore all'*École Polytechnique*, astronomo, ingegnere militare, studioso di fotogrammetria e cartografo, pubblica un libro intitolato *La Métrophotographie* (fig. 1). Nella prime pagine del testo, Laussedat spiega cosa indichi il termine metrofotografia.

La Métrophotographie, selon l'étymologie du mot, est l'art de prendre des mesures à l'aide de la Photographie. Je me propose surtout de vous indiquer comment on peut employer les vues de monuments ou des paysages pour reconstituer les plans de ces monuments ou du terrain représenté par ces paysages[3].

Il testo di Laussedat testimonia la fase di transizione dai dispositivi ottici, camera oscura e camera chiara, capaci di proiettare temporaneamente l'immagine prospettica su un supporto e permetterne il 'ricalco'

3 Laussedat A., 1899, p. 5.

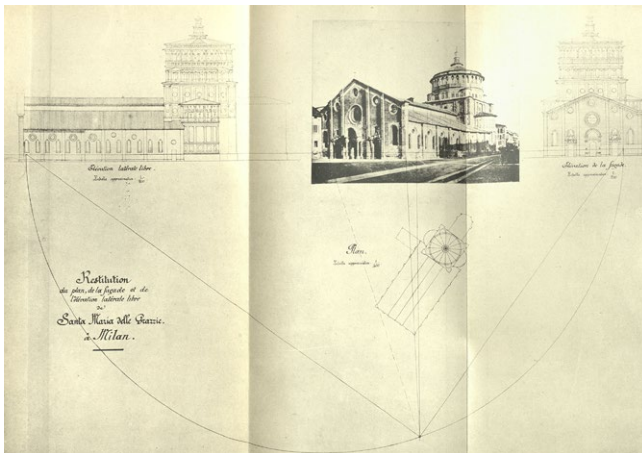
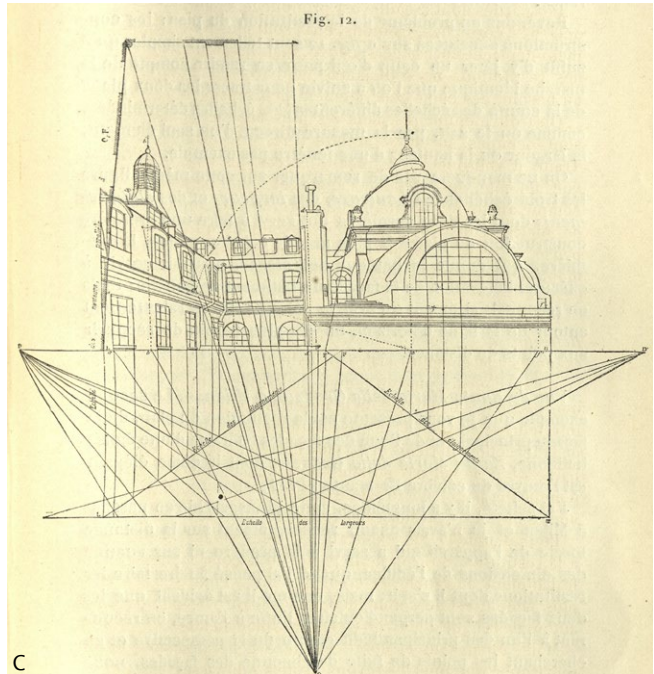
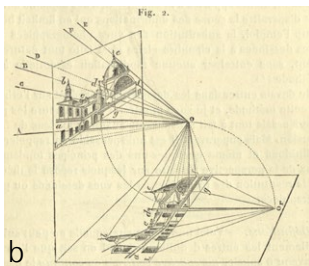
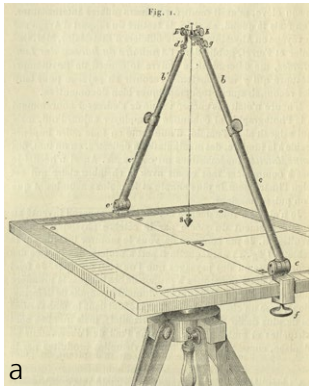



Fig. 2/ *a)* Dispositivo ottico denominato 'camera chiara'. Laussedat A., 1899, p. 8. *b)* Disegno con camera chiara della prospettiva del complesso dell'abbazia di Penthemont a Parigi. Laussedat A., 1899, p. 9. *c)* Restituzione della pianta del complesso monumentale di Penthemont dal disegno prodotto con la camera chiara. Laussedat A., 1899, p. 21.

Fig. 3/ Restituzione prospettica da fotografia dei prospetti e della planimetria della chiesa di Santa Maria delle Grazie a Milano. Laussedat A., 1899, Planche I.

(fig. 2), alla fotografia, capace invece di fissare stabilmente l'immagine (fig. 3).
L'autore afferma che la tecnica fotografica non garantiva ancora, a quel tempo, la correttezza geometrica dei disegni prospettici che un bravo disegnatore poteva produrre con l'ausilio della camera chiara[5].

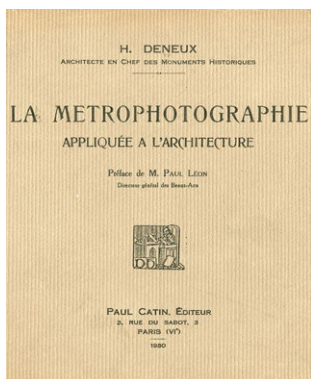



Fig. 4/ Henri Deneux, *La Metrophotographie appliquée à l'architecture*, Copertina.

Espone dunque restituzioni prospettiche estratte sia da disegni prodotti con l'ausilio della camera chiara che da immagini fotografiche, per mostrare l'invarianza delle procedure seguite.
La restituzione da camera chiara è applicata al rilievo della cupola di Penthemont a Parigi, mentre la fotografia è utilizzata per 'simulare' il rilievo della chiesa di Santa Maria delle Grazie a Milano.
Laussedat dichiara di non essere l'autore dello scatto, di non avere informazioni sulla camera utilizzata né sulle dimensioni del manufatto.
Precisa, comunque, che la mancanza di queste informazioni non impedisce la restituzione, che potrà essere 'messa in scala' quando una misura diventerà disponibile; in tal modo Laussedat afferma in modo inequivocabile la possibilità, offerta dalla tecnica fotogrammetrica, di restituire dimensioni proporzionalmente corrette anche in assenza di dati metrici.
La parte dedicata alla restituzione prospettica da singolo fotogramma è relativamente minoritaria nel testo, che dedica ampio spazio alla restituzione da due o più fotografie opportunamente orientate, particolarmente utile per il rilievo dell'orografia del terreno e delle catene montuose.
Il libro di Laussedat è importante anche sotto il profilo storico, perché offre una dettagliata rassegna delle esperienze e dei protagonisti della stagione che vede la diffusione della fotogrammetria in Europa e nel Nord America[4].
A trent'anni di distanza dall'opera di Laussedat, Henri Deneux (1874-1969), architetto, incaricato per la ricostruzione della Cattedrale di Reims dopo i danneggiamenti della Prima guerra mondiale, pubblica un volume interamente dedicato alla restituzione prospettica da singolo fotogramma (fig. 4).
Il titolo dell'opera, *La Métrophotographie*, è anche un omaggio a Laussedat, al quale l'autore riconosce il ruolo di precursore.

4 Il termine 'metrofotografia' viene usato solo in Francia; in Germania, la tecnica che permette di restituire misure dalle immagini, verrà chiamata 'fotogrammetria'. Nel corso del XX secolo questo nome si affermerà, eclissando il termine coniato da Laussedat.

Deneux dichiara, fin dalla presentazione, che il libro è più indirizzato agli architetti che ai topografi.

On remarquera que nous avons évité intentionnellement, toutes les formules mathématiques, qui auraient rendu plus aride l'aspect de cette science. Nous avons surtout cherché à présenter les solutions comme les architectes ont l'habitude a résoudre, c'est-a-dire par la géométrie descriptive appliquée[5].

Il libro di Deneux segue le distruzioni della Prima guerra mondiale; per questo motivo l'autore sottolinea la duplice valenza della restituzione prospettica da fotografia, come strumento per il rilievo e come ausilio per la ricostruzione di edifici totalmente o parzialmente distrutti dagli eventi bellici.

Appliquée à l'Architecture, cette science permet de relever les parties inaccessibles des édifices sans le secours d'échafaudages (...) Mais, où la métrophotographie peut rendre encore de grands services, c'est dans la restitution des ensemble et des détails en géométral, des édifices plus ou moins détruits, en utilisant pour cela, les photographies antérieures à leur destruction[6].

La struttura del libro rivela l'intento didattico e divulgativo. La prima parte è dedicata alla determinazione, per via grafica, degli elementi che strutturano la scena prospettica: il punto principale *P* e la distanza del centro di proiezione dal quadro. Sono trattate separatamente le procedure di restituzione per le prospettive a quadro verticale e per quelle a quadro inclinato (fig. 5). Introducendo la prospettiva a quadro verticale, l'autore parla del 'decentramento', una soluzione praticabile con particolari camere, utilizzate per la fotografia di architettura in virtù della loro capacità di inquadrare le parti alte degli edifici senza inclinare verso l'alto l'asse di presa, e ridurre al contempo la visione del piano di campagna.

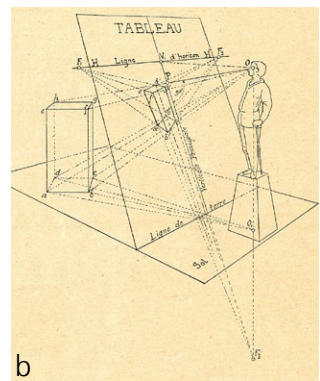
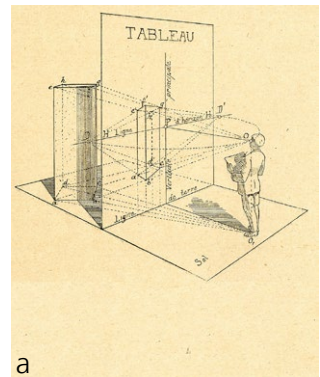
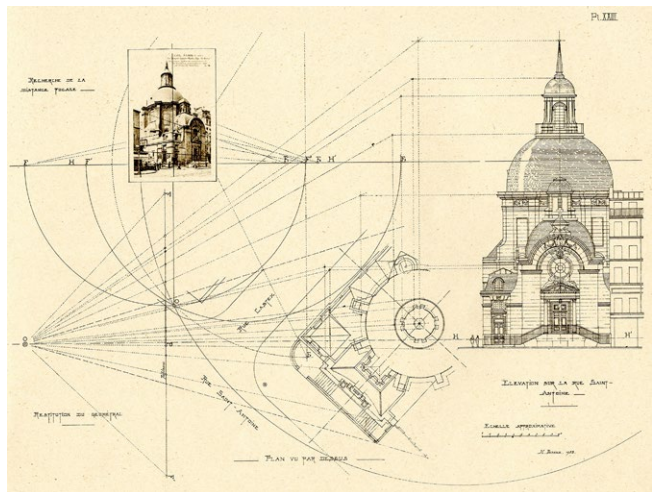
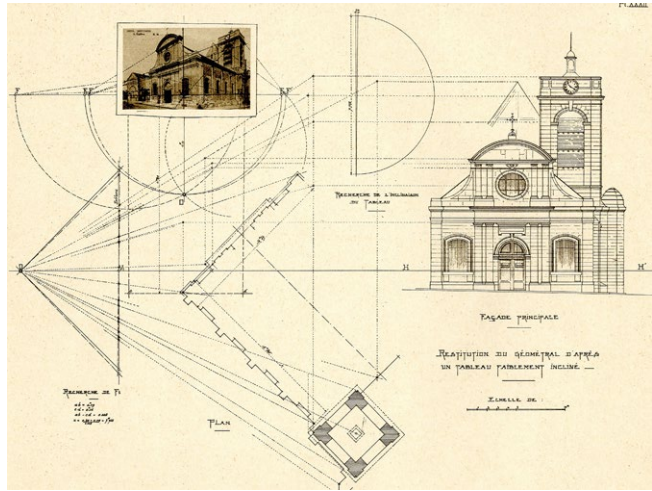



Fig. 5/ *a)* Prospettiva a quadro verticale. Deneux H., 1930, p. 4. *b)* Prospettiva a quadro inclinato. Deneux H., 1930, p. 5.

5 Deneux H., 1930, *Avant-propos*.
6 Deneux H., 1930, p. 3.

Fig. 6/ Restituzione prospettica da fotografia della chiesa di San Martino a Meudon. Deneux H., 1930, *Planche* XXXII.

Fig. 7/ Restituzione prospettica da fotografia del *Temple du Marais* a Parigi. Deneux H., 1930, *Planche* XXIII.

Gran parte delle immagini utilizzate da Denuex sono acquisite con il decentramento dell'obiettivo; fra queste, la restituzione prospettica della chiesa di San Martino a Meudon (fig. 6) e del tempio del Marais a Parigi di François Mansart (fig. 7).
In entrambe le immagini il punto principale si trova sull'asse verticale dell'immagine fotografica, sotto il suo centro geometrico.
Per la restituzione della Chiesa del Sacro Cuore, l'autore si sofferma sulla possibilità di utilizzare più

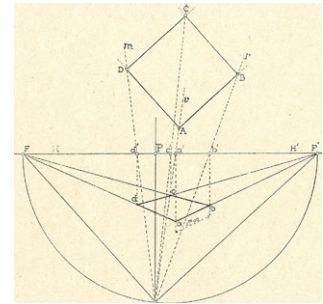
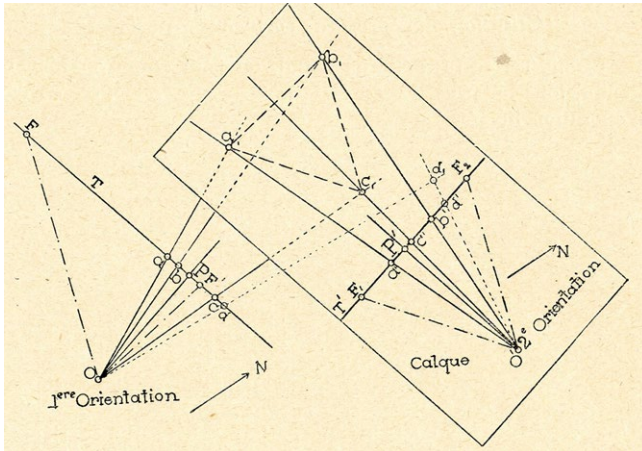



Fig. 8/ Allineamento di due immagini fotografiche. Deneux H., p. 48.

Fig. 9/Regola del parallelogramma. Deneux H., 1930, p. 41.

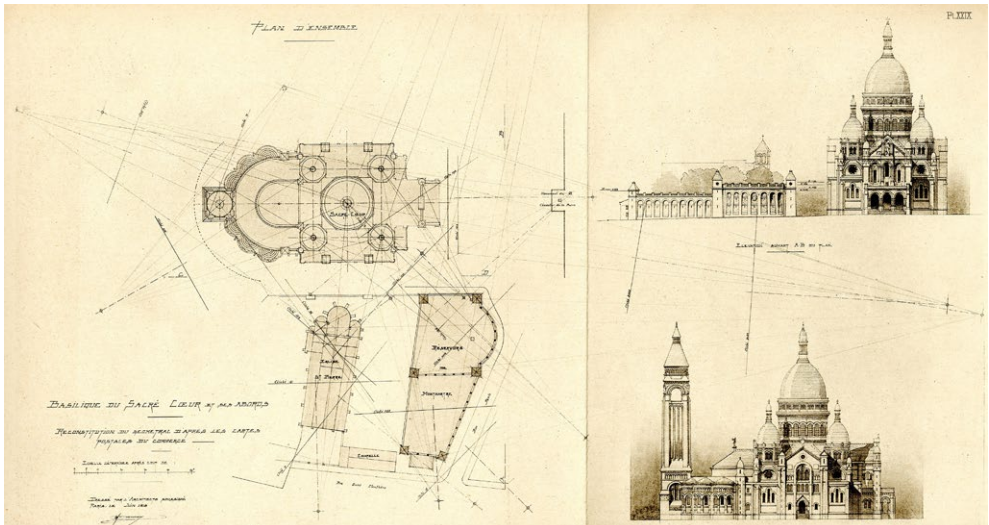



Fig. 10/ Restituzione della chiesa del Sacro Cuore a Parigi con diverse immagini allineate. Deneux H., 1930, *Planche* XXIX.

immagini fotografiche (fig. 8), ricostruendone le posizioni relative in un sistema di riferimento collegato al manufatto oggetto della restituzione e con l'ausilio della cosiddetta 'regola del parallelogramma', di cui si dirà più avanti (fig. 9).
La chiarezza espositiva del testo e la capacità comunicativa dei disegni (fig. 10) fanno del libro di Deneux un riferimento per gli studi sulla restituzione prospettica da fotografia che mantiene la propria validità anche a distanza di quasi un secolo.

Fig. 11/ Mario Docci, *Principi di fotogrammetria e restituzione prospettica da architetture*, Seconda di copertina.

Quasi trent'anni dopo il libro di Deneux, Mario Docci, docente di Disegno e oggi professore emerito presso Sapienza Università di Roma, pubblica il volume *Principi di fotogrammetria e restituzione prospettica da architetture* (fig. 11).
Si tratta del primo studio organico sulla restituzione prospettica da fotografia pubblicato in Italia. L'intento dell'autore è quello di offrire ai lettori un ampio panorama delle tecniche fotogrammetriche, al fine di supportare la scelta della metodologia più adatta alle finalità del rilievo architettonico.
Alla restituzione prospettica da fotografia è dedicata la prima parte del testo; l'autore definisce questa tecnica "Fotogrammetria elementare", per distinguerla dalla Fotogrammetria classica, che usa ancora i principi della prospettiva, e dalla Fotogrammetria stereoscopica, basata sulla misura dell'angolo di parallasse.
La trattazione della restituzione prospettica ricalca l'impianto di Deneux nella distinzione tra prospettiva a quadro verticale e a quadro inclinato. Anche Docci indirizza il suo studio agli architetti.

E' per questo che ho creduto utile affrontare l'argomento della restituzione prospettica da un punto di vista nuovo: ho cercato di vedere l'argomento sotto un unico aspetto ed in particolare sotto il punta di vista di un Architetto[7].

L'autore ritorna spesso sui limiti della restituzione prospettica da fotografia, specie se confrontata con la fotogrammetria stereoscopica.

Applicando alla fotografia i procedimenti della restituzione prospettica si ottengono delle misure approssimative dell'oggetto. In seguito vedremo trattando della Stereofotogrammetria come, attraverso due fotogrammi di uno stesso oggetto, sia possibile avere delle misure molto precise dell'oggetto stesso[8].

7 Docci M., 1964, p. 5.
8 Docci M., 1964, p. 26.

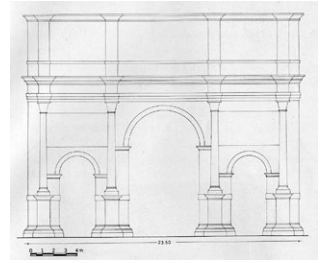
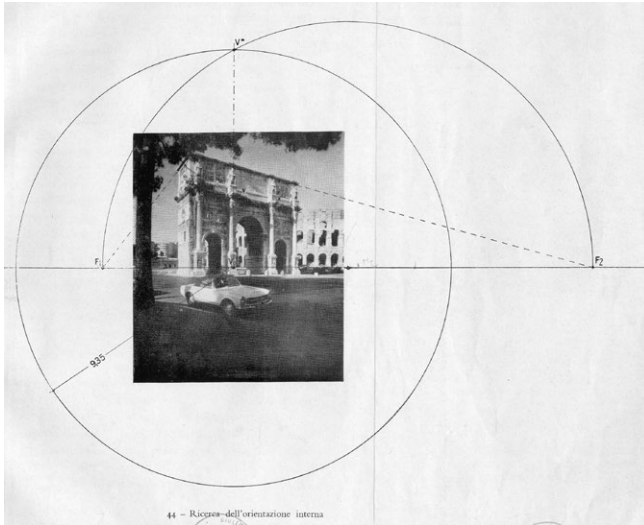



Fig. 12/ Orientamento interno di una fotografia a quadro verticale dell'arco di Costantino a Roma. Docci M., 1964, p. 100.

Fig. 13/ Restituzione del fronte dell'arco di Costantino. Docci M., 1964, p. 103.

Fig. 14/ Orientamento interno di una fotografia a quadro inclinato dell'arco di Costantino a Roma. Docci M., 1964, p. 106.

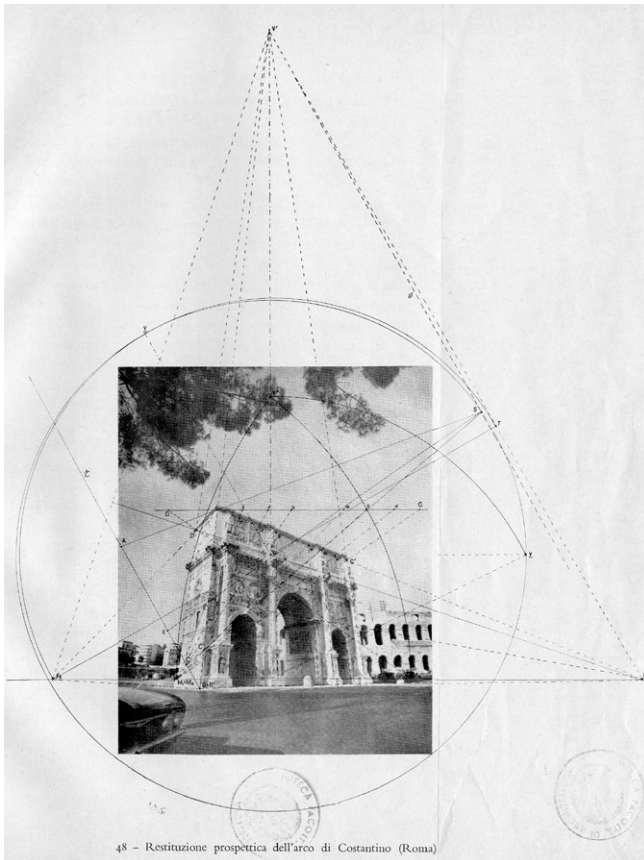
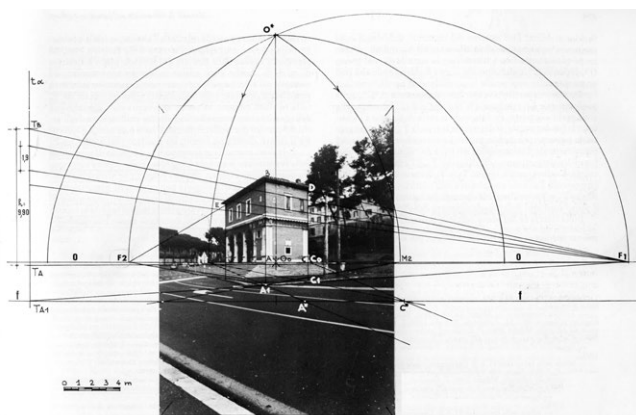



Fig. 15/ Docci M., Maestri D., 1994, copertina.

Fig. 16/ Restituzione delle altezze inaccessibili da foto a quadro verticale. Docci M., Maestri D., 1994, p. 253.

Nella restituzione del fronte dell'arco di Costantino a Roma (figg. 12-14) l'autore stima che, pur in condizioni ideali, i margini di errore si aggirano intorno al 5%, ovvero 1,40 m sui circa 25 m di ampiezza del monumento.
La seconda parte del testo è dedicata alla fotogrammetria stereoscopica, che l'autore auspica si diffonda sempre più fra gli architetti, poiché ravvisa la necessità di una convergenza fra il sapere 'tecnico' del topografo fotogrammetra e la capacità di interpretazione dell'architetto.

E' auspicabile che a questo tipo di rilievo si dedichino sempre più gli Architetti in modo da dare un impulso maggiore a queste ricerche fino ad ora lasciate ai tecnici (...) queste macchine, normalmente, vengono usate da tecnici, che non hanno nessuna esperienza di elementi architettonici, e abituati al lavoro di topografia trovano notevoli difficoltà per le interpretazioni dei dettagli[9].

Nel volume *Manuale di Rilevamento architettonico e urbano* (fig. 15), che Docci scrive trent'anni più tardi con Diego Maestri, la restituzione prospettica da fotografia è illustrata da una sola immagine (fig. 16), accompagnata da una breve e laconica menzione.

9 Docci M., 1964, p. 158.
10 Docci M., 1994, p. 252.

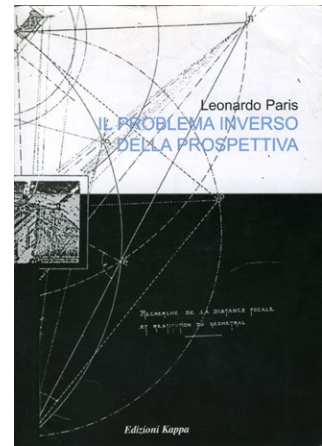
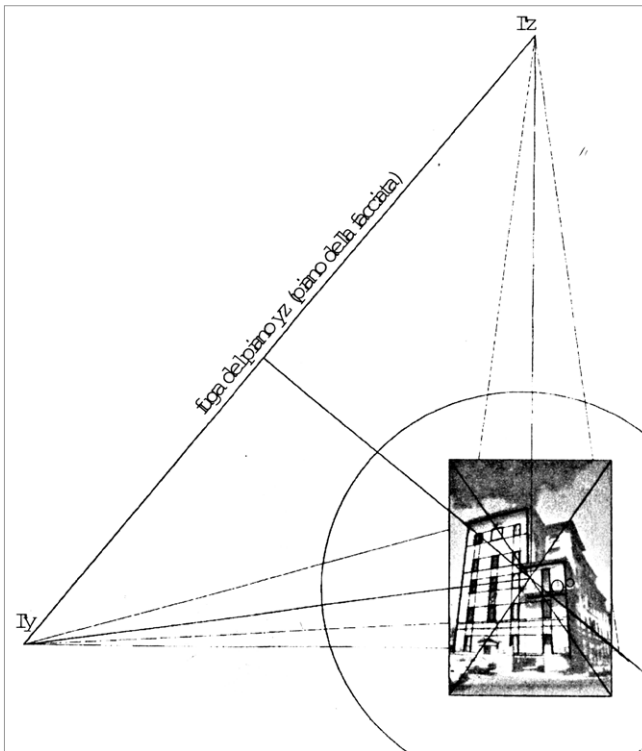



Fig. 17/ *a)* Orientamento interno di una prospettiva a quadro inclinato. Paris L., 2000, p. 130. *b)* Restituzione del fronte tramite ribaltamento sul quadro. Paris L., 2000, p. 131.

Fig. 18/ Paris L., 2000, Copertina.

I risultati che ne conseguono dal punto di vista della precisione, sono compatibili con quelli di un rilievo diretto, mentre non possono competere con quelli conseguiti per mezzo del rilevamento fotogrammetrico[10].

Pochi anni dopo, nel 2000, Leonardo Paris, docente di Disegno presso Sapienza Università di Roma, pubblica *Il problema inverso della prospettiva*, un volume interamente dedicato alla restituzione prospettica (figg. 17-18). L'autore ha il merito di aver ricostruito in modo chiaro e sistematico l'excursus storico storico del procedimento di restituzione, rintracciandone le prime applicazioni nel trattato sulla prospettiva di Guidobaldo del Monte, per seguirne l'evoluzione fino alla fine del millennio. Nel suo libro Paris illustra bene anche il periodo e i protagonisti della nascita della tecnica fotografica.

Fig. 19/ Ricostruzione dell'orientamento interno di un'immagine fotografica. Dzwierzynska J., 2017, p. 6.

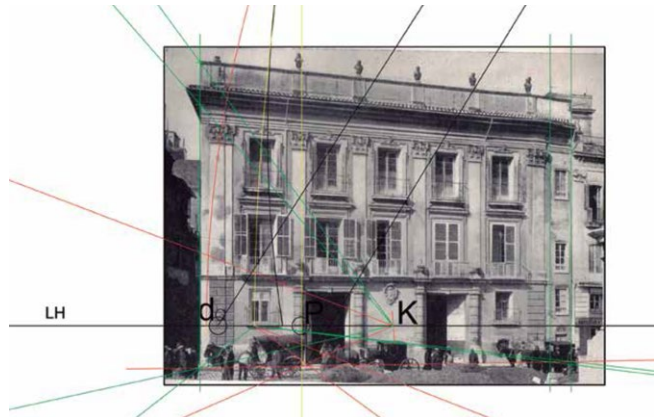
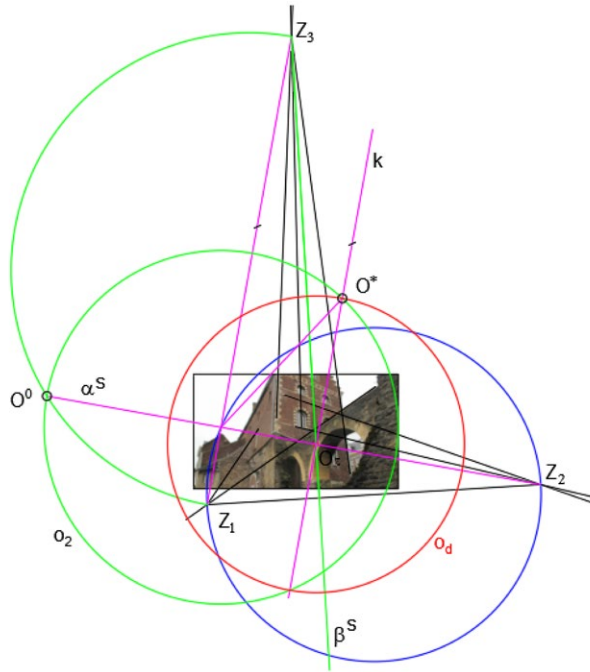
Fig. 20/ Restituzione della facciata del palazzo Jura Real di Valencia, non più esistente, da foto d'epoca. Gomez-Gil A., Ramón-Constantí A., 2020, p. 154.

Alla restituzione da fotografia sono dedicate le ultime pagine del volume; alcune delle applicazioni sono eseguite con l'uso di strumenti di rappresentazione digitale, che semplificano la rappresentazione di rette i cui punti di fuga si trovano all'esterno del rettangolo che delimita il fotogramma, e a grande distanza da esso.

Fig. 21/ Tracciamento semi-automatico di spigoli retti sull'immagine fotografica. Van den Heuel, 1998, p. 365.

L'esito della restituzione rimane comunque il ribaltamento di entità geometriche bidimensionali sul piano dell'immagine, probabilmente a causa dello sviluppo embrionale degli strumenti hardware e software per la modellazione. Numerosi studiosi comprendono le potenzialità offerte dagli strumenti di disegno digitale per la restituzione prospettica di figure piane attraverso ribaltamenti sul quadro: fra questi, Jolanta Dzwierzynska (fig. 19) e Antonio Gómez-Gil con Amanda Ramón-Constantí (fig. 20), per i cui studi si rimanda alla bibliografia.

Procedure assistite di orientamento e restituzione

Nel 1998, Frank A. Van den Heuel, ingegnere, Dottore di Ricerca in Geodesia e Fotogrammetria presso il Politecnico di Delft, propone un approccio di restituzione tridimensionale da una singola immagine, basato sul tracciamento di linee.

Il metodo di Van den Heuel si presta esclusivamente alla restituzione di manufatti caratterizzati da relazioni topologiche identificabili, come i vincoli di complanarità, parallelismo di rette e piani, ortogonalità fra rette e piani, simmetria.

Le linee possono essere inserite o estratte automaticamente attraverso l'identificazione di vincoli (fig. 21).

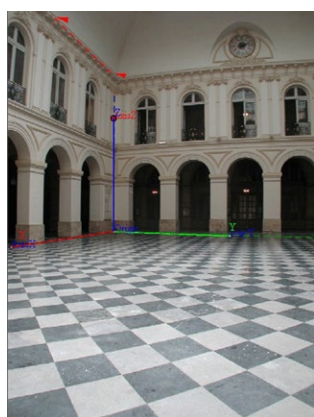
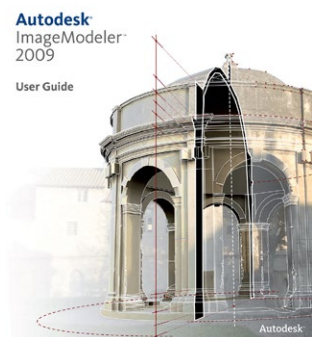



Fig. 22/ Copertina del manuale d'uso di Autodesk ImageModeler.

Fig. 23/ Restituzione del modello texturizzato della Torre dell'orologio a Berkeley. Debevec P., 1996, p.4.

Fig. 24/ Orientamento di una fotografia con ImageModeler.

Il software non richiede l'inserimento di punti di coordinate note, tranne che per l'orientamento del modello ricostruttivo; per la sua scalatura è sufficiente inserire una misura nota. Dopo aver sottolineato che il software si presta bene alla ricostruzione di edifici scomparsi, documentati da poche immagini, Van den Heuel dichiara che il processo di sviluppo è in avanzata fase di elaborazione e che si sta lavorando all'interfaccia. Non sono noti tuttavia i successivi sviluppi.

Nel 1996, Paul Debevec, laureato in Matematica e Ingegneria Informatica all'Università del Michigan, noto al grande pubblico per il pluripremiato cortometraggio *The Parthenon*[11], conclude il Dottorato di Ricerca in *Computer Science* a Berkeley, con una tesi dal titolo *Modeling and Rendering Architecture from Photographs: a hybrid geometry and image-based approach*. La tesi di dottorato conduce Debevec all'elaborazione del software *Façade*, un sistema di modellazione *image-based* per la creazione di ambientazioni cinematografiche e architettoniche (fig. 22). *Façade* utilizza vincoli che sono tipici di scene architettoniche (simmetria, ad es.) e può operare la ricostruzione di un modello digitale su una singola immagine o su più immagini. Il calcolo dell'orientamento interno dell'immagine avviene attraverso il posizionamento di solidi semplici e l'imposizione di vincoli tra le geometrie disegnate.

11 Il video è reperibile all'indirizzo <https://vgl.ict.usc.edu/Data/ParthenonGallery/film/>.

Façade è rimasto un prototipo di ricerca, ma ha ispirato lo sviluppo di *Canoma* della MetaCreations, acquisito da Adobe, e di *ImageModeler*, rilasciato nel 1998 dalla RealViz e acquisito da Autodesk nel 2008 (fig. 23). *ImageModeler* ha goduto di un indiscusso successo nel primo decennio del millennio, poiché permetteva di costruire modelli direttamente sulle immagini fotografiche (fig. 24); nonostante ciò, Autodesk ha deciso di interrompere lo sviluppo e la commercializzazione del software, che si è fermato alla *release* 2009.

Fra i software oggi disponibili per la ricerca assistita dei parametri di orientamento interno ed esterno di una singola immagine fotografica, si segnalano *SketchUp*, un prodotto commerciale molto diffuso fra gli architetti, e *Fspy*, distribuito gratuitamente a partire dal 2018. Entrambi i software permettono di risolvere l'orientamento interno attraverso l'individuazione di rette ortogonali tra loro. *Sketchup*, come prima *ImageModeler*, include strumenti di modellazione; *FSpy*, invece, esegue solo gli orientamenti, ma genera una camera che può essere caricata in *Blender*. Sia *Sketchup* che *Blender* permettono di proiettare i pixel della fotografia sul modello (figg. 25-26). *Fspy* è in grado di calcolare l'orientamento interno anche quando il punto principale non occupa il centro geometrico del fotogramma e permette di leggere i parametri della camera (posizione e angoli euleriani). Entrambi i software eseguono l'orientamento esterno sulla base di un segmento di lunghezza nota. Le immagini che illustrano questa pagina mostrano l'uso di questi software per l'orientamento di una fotografia che ritroveremo più avanti (fig. 27). Un ulteriore software, di cui si dirà nel quinto capitolo, permette di risolvere in modo semi-automatico il processo di orientamento interno ed esterno di una fotografia, a partire dalle coordinate spaziali di alcuni punti.

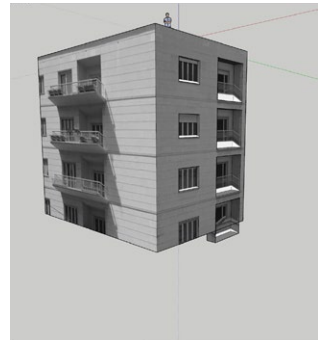
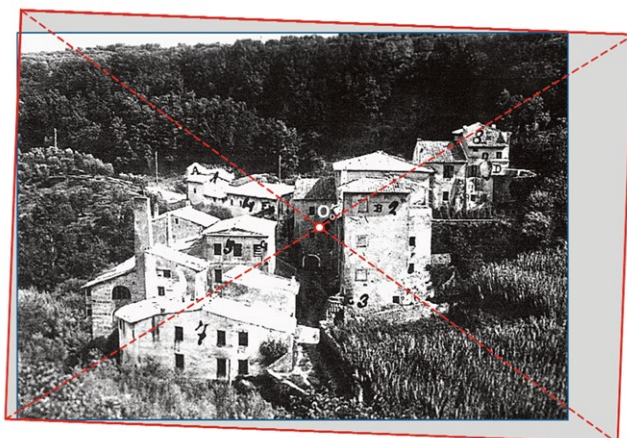



Fig. 25/ SketchUp: orientamento interno ed esterno .

Fig. 26/ SketchUp: texturing del modello.

Fig. 27/ FSpy: Orientamento interno.

Fig. 28/ DisegnareCon. Numero 12, Ottobre 2013.

Fig. 29/ Foto d'epoca utilizzata per la sperimentazione. Migliari et al., 2013, p. 3.

Restituzione prospettica con tecniche di modellazione

Fra gli studiosi che per primi hanno compreso le opportunità che il disegno e la modellazione digitale potevano offrire per un rinnovamento delle ricerche di scienza della rappresentazione, merita un posto di rilievo Riccardo Migliari, professore ordinario di Disegno dal 1990 presso Sapienza Università di Roma, oggi professore emerito, autore di numerosi e autorevoli libri di geometria descrittiva.

Benché la prospettiva sia stata sempre presente nei suoi studi e oggetto di particolare attenzione nella sua più recente produzione scientifica, Migliari dedica alla restituzione prospettica da fotografia 'soltanto' un breve ma esemplare saggio, scritto con Federico Fallavolita e Marta Salvatore (fig. 28), pubblicato nel 2013[12].

Il saggio presenta gli esiti di uno studio nel quale, probabilmente per la prima volta, gli apparati concettuali della scienza della rappresentazione sono combinati con le tecniche di modellazione digitale, sia per il calcolo dell'orientamento interno ed esterno di un'immagine fotografica (fig. 29), che per la restituzione dei manufatti raffigurati, alcuni dei quali non più esistenti.

12 Migliari R. et al., 2013.

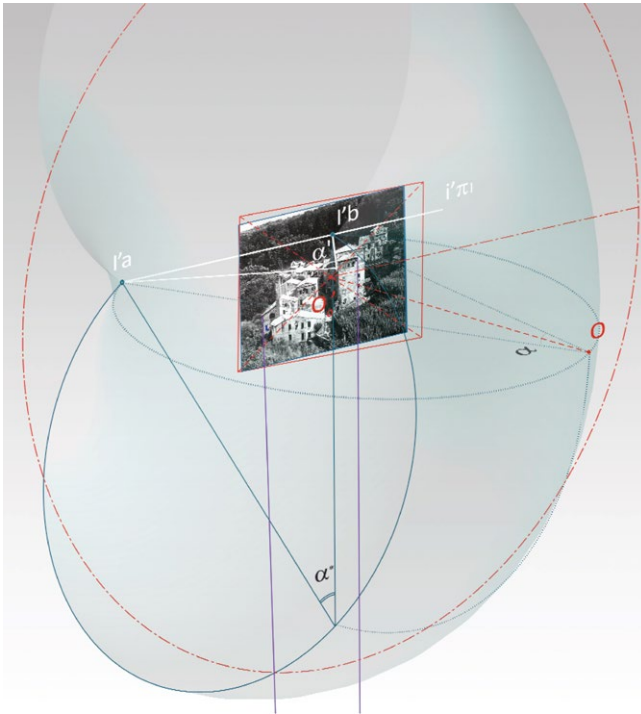



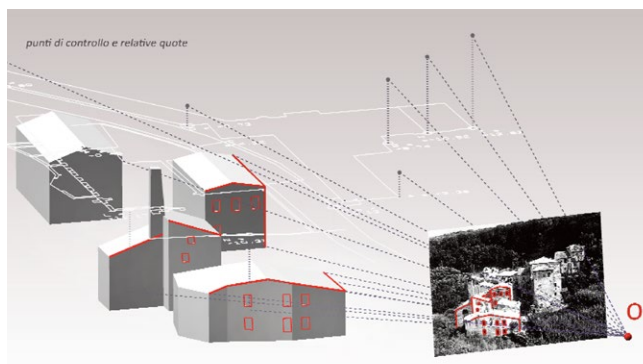
Fig. 30/ Orientamento interno mediante la modellazione. Migliari et al., 2013, p. 5.

Lo studio, caratterizzato da uno stile narrativo preciso ed essenziale, inquadra in modo netto la questione della restituzione prospettica.

La restituzione di punti nello spazio da immagini bidimensionali è possibile se queste sono di natura proiettiva e si dispone di almeno due stelle proiettive orientate[13].

Il calcolo della distanza focale, data la posizione del punto principale e l'angolo formato da due rette orizzontali, viene risolto dall'intersezione fra la retta ortogonale al piano dell'immagine, che passa per il punto principale, e una superficie torica, generata dalla rivoluzione di un arco di circonferenza capace dell'angolo noto intorno al segmento che passa per i punti di fuga delle rette orizzontali (fig. 30).
Date le posizioni nello spazio di tre punti riconoscibili nell'immagine, desunte a seguito di un rilievo sui

13 Migliari R. et al., 2013, p. 1

Fig. 31/ Ricostruzione tridimensionale degli edifici raffigurati nell'immagine fotografica. Migliari et al., 2013, p. 9.

manufatti ancora *in situ*, tre ulteriori superfici toriche permettono di risolvere il problema dell'orientamento esterno. In entrambi i casi, la costruzione delle superfici toriche deriva dall'applicazione delle relazioni fra angoli al centro e angoli alla circonferenza, che ritroveremo più avanti in questo testo per la soluzione dell'orientamento interno dell'immagine fotografica[14]. Il presupposto scientifico della soluzione per l'orientamento esterno è il problema del vertice di piramide enunciato da Gaspard Monge (1746-1818), trasferimento nello spazio del problema risolto nel 1615 dal matematico olandese Snellius[15] (1591-1626), noto in topografia come problema dell'intersezione inversa.

L'eleganza della soluzione proposta dagli autori ha, a giudizio di chi scrive, un solo punto debole: assegna un ruolo secondario all'orientamento delle rette verticali, che risulta determinato al termine della procedura e, sottoposto a verifica dagli autori stessi, mostra un leggero scarto rispetto alla direzione dell'asse *z* nello spazio di modellazione del software utilizzato. La scelta di utilizzare la soluzione del vertice di piramide, ineccepibile sotto il profilo scientifico, risulta probabilmente meno idonea di altre, nei processi che mirano alla restituzione di manufatti architettonici, per i quali la direzione delle rette verticali riveste un ruolo prioritario (fig. 31).

14 La soluzione dell'orientamento esterno attraverso la modellazione di tre superfici toriche, date le posizioni di tre punti e gli angoli con i quali gli stessi punti vengono 'visti' dal centro di proiezione era stata già proposta nel 1999 da Marco Carpiceci. Probabilmente per la complessità dei processi di modellazione dell'epoca, la soluzione di Carpiceci risulta meno intuitiva di quella proposta da Migliari.

15 Snellius è il nome umanistico del matematico olandese Willebrord Snell van Royen.

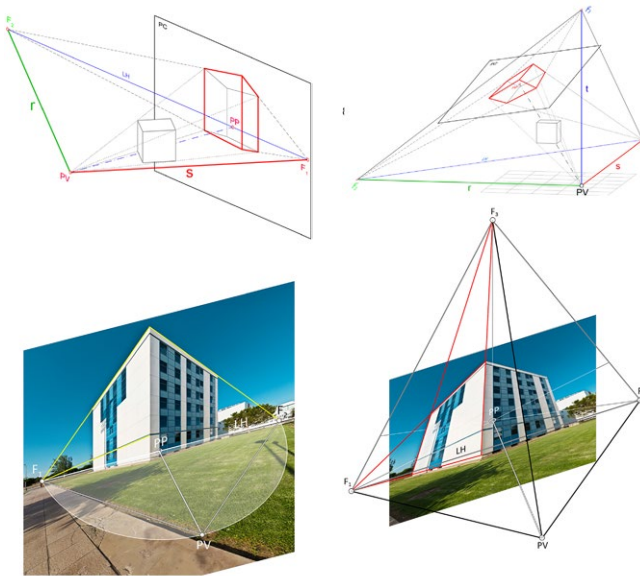



Fig. 32/ Restituzione da foto a quadro verticale e a quadro inclinato. Cabezos P., Cisneros J., 2013, pp. 6-7.

Il saggio conserva l'indubbio merito di aver indicato una prospettiva di ricerca e aver determinato una svolta negli studi sulla restituzione prospettica, trasferendola, grazie agli strumenti digitali di modellazione, dal piano dell'immagine allo spazio.
Nella stessa rivista, poche pagine più avanti, è pubblicato un contributo incentrato sullo stesso argomento, che presenta gli esiti di una ricerca condotta di due docenti della scuola Politecnica di Valencia, Pedro M. Cabezos-Bernal e Juan J. Cisneros-Vivò.
In questo saggio la restituzione prospettica da singolo fotogramma viene eseguita applicando strumenti di disegno digitale alla soluzione spaziale dell'orientamento interno della foto, tramite costruzioni grafiche. Gli strumenti di modellazione vengono utilizzati per la ricostruzione degli artefatti raffigurati nelle immagini. Per l'illustrazione delle procedure per la determinazione dell'orientamento interno ed esterno gli autori adottano la tradizionale distinzione fra prospettive a quadro verticale e prospettive a quadro inclinato (fig. 32).

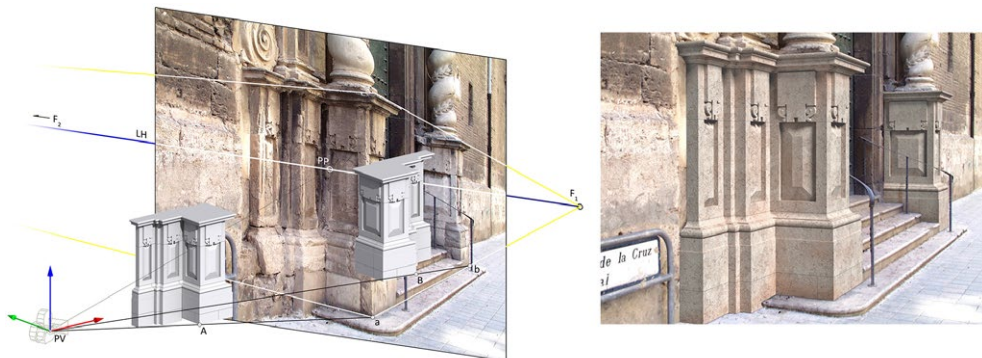



Fig. 33/ Restituzione e posizionamento di elementi architettonici. Cabezos P., Cisneros J., 2013, pp. 10-11.

Gli autori si soffermano anche sulla possibilità di estrarre fotopiani da immagini prospettiche, una linea di ricerca già presente negli scritti di Leonardo Paris e Marco Carpiceci.
Benché le procedure di restituzione tramite modellazione siano descritte in modo estremamente sintetico, le immagini mostrano una completa padronanza della costruzione di modelli da singola fotografia, con la restituzione prospettica (fig. 33).

2
La prospettiva nelle immagini fotografiche

L'illustrazione dei procedimenti per la rappresentazione prospettica viene di solito trattata con l'ausilio di scenari d'invenzione, costituiti da solidi semplici o ambienti disposti ad arte.
Lo stesso può dirsi del procedimento che, da un'immagine prospettica, permette di risalire alla vera forma di oggetti rappresentati in prospettiva e alla loro dimensione: la restituzione prospettica.
Questa tecnica, come già accennato, è l'unica che permette di ricostruire un artefatto nella sua tridimensionalità, a partire da una sola immagine fotografica; occorre però che l'oggetto della restituzione sia caratterizzato da una forma geometrica, che permetta di individuare rette legate da relazioni di parallelismo, complanarità, ortogonalità, ecc.
L'architettura, caratterizzata dalla presenza di spigoli orizzontali e verticali è, come intuito da Deneux, uno dei soggetti che meglio si presta all'applicazione della restituzione prospettica.

Fig. 1/ Piazzale Ungheria, Palermo. Foto del grattacielo che chiude uno dei lati del piazzale, di forma rettangolare allungata.

In questo testo, incentrato sulla ricostruzione di edifici perduti da immagini fotografiche, si è scelto di illustrare la costruzione prospettica e il procedimento inverso di restituzione con l'ausilio di una fotografia di uno scenario esistente: un complesso edilizio costruito negli anni '50 del XX secolo, composto da edifici di forma parallelepipeda disposti intorno a un'ampia corte aperta di forma rettangolare.
Già a un primo sguardo, emerge in modo evidente l'intenzione del progettista di costruire una scena prospettica, che converge verso uno dei lati brevi della corte (fig. 1), dove è ubicato il cosiddetto 'grattacielo', un edificio di altezza doppia rispetto ai corpi di fabbrica disposti lungo i tre lati restanti[1].
In questo capitolo e nel successivo utilizzeremo una fotografia acquisita con una camere standard.
Con l'aggettivo 'standard' indichiamo quelle macchine fotografiche nelle quali la superficie di attacco

1 Il complesso di Piazzale Ungheria è ubicato a Palermo a poca distanza dal margine settentrionale del centro storico. L'alto edificio, progettato da Carlo Broggi, è stato costruito tra il 1952 e il 1955.

dell'obiettivo e la superficie sensibile (pellicola fotografica o sensore digitale) sono fisse e parallele tra loro; in queste camere, l'asse dell'obiettivo è ortogonale alla superficie piana che registra l'immagine. Affinché il processo di restituzione possa compiersi, occorre che l'immagine fotografica si avvicini, quanto più è possibile, alle condizioni teoriche della prospettiva lineare, che presuppone la presenza di una superficie perfettamente piana, detta quadro, e di rette convergenti in un punto adimensionale, che intercettano i punti della scena da rappresentare in prospettiva.

Le intersezioni fra queste rette e il quadro sono le proiezioni prospettiche dei punti.

Nella fotografia i raggi luminosi raggiungono la superficie sensibile dopo aver attraversato il complesso sistema di lenti che compone l'obiettivo.

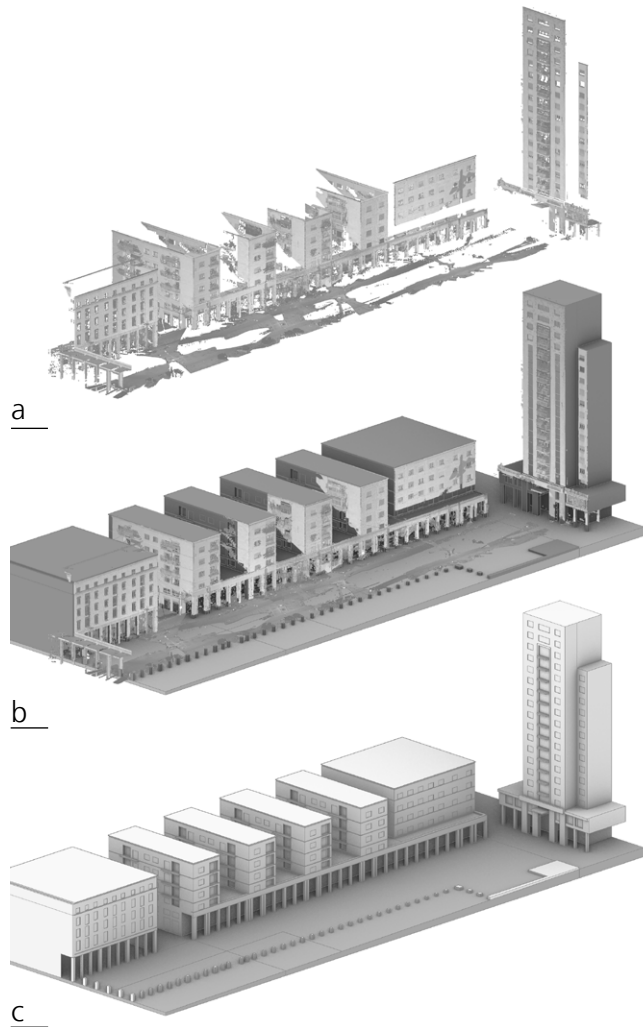
La qualità e le caratteristiche dell'obbiettivo condizionano fortemente la proiezione prospettica fissata dall'immagine, che può anche sensibilmente scostarsi dalle condizioni teoriche della prospettiva.

Ottiche di bassa qualità, ovvero fortemente grandangolari, generano immagini nelle quali le linee rette appaiono curve.

Non è questa la sede per una disamina attenta della tecnica fotografica; basta qui annotare che non tutte le immagini fotografiche possono essere utilizzate per una restituzione prospettica.

Al fine di facilitare l'illustrazione delle relazioni proiettive fra uno scenario tridimensionale e la sua rappresentazione prospettica in fotografia, ovvero, all'inverso, della sua ricostruzione da immagini fotografiche, è stato costruito un modello digitale del complesso urbano scelto come caso studio.

Per ottenere una buona corrispondenza con la reale configurazione spaziale della corte, il modello è stato costruito su una nuvola di punti generata dalla mosaicatura di alcune scansioni laser. (fig. 2).

Fig. 2/ Assonometrie ortogonali con indicazione della terna di assi di riferimento: *a)* nuvola di punti acquisita con scanner laser; *b)* nuvola e modello 3D; *c)* modello 3D.

Nel rilievo con laser scanner, le coordinate dei punti sono riferite a una terna di assi cartesiana che ha asse *z* verticale, grazie alla possibilità di mettere in bolla lo strumento.
L'orientamento degli assi *x* e *y* viene invece assegnato in fase di post-elaborazione; nel nostro caso la nuvola di punti è stata ruotata intorno all'asse *z*, in modo da rendere i lati lunghi della corte aperta paralleli all'asse *x* (fig. 3).

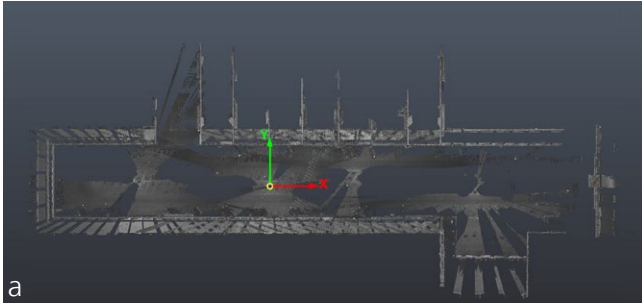



Fig. 3/ *a-b)* Viste ortografiche superiore e frontale della nuvola di punti con l'indicazione della terna di assi di riferimento. *c)* Immagine panoramica catturata dallo scanner. Gli assi del sistema di riferimento cartesiano sono stati rappresentati secondo la codifica RGB (*Red, Green, Blue*) utilizzata dai software di modellazione e rendering: rosso per l'asse x, verde per l'asse y e blu per l'asse z.

Fig. 4/ Rilievo fotogrammetrico della corte; dalle immagini orientate, rappresentate da piccole superfici rettangolari densamente accostate, è stata generata una nuova nuvola di punti degli edifici che delimitano la piazza.

Sono state anche acquisite circa 150 immagini fotografiche dei fronti degli edifici rivolti verso la corte aperta[2]; queste immagini sono state utilizzate per costruire, con tecniche SfM[3], un modello fotogrammetrico (fig. 4).
Una di queste immagini è stata scelta per illustrare la descrizione della prospettiva e, successivamente, della restituzione prospettica. Il modello fotogrammetrico della corte permetterà di valutare le differenze fra la posizione e l'orientamento della camera

2 Le riprese fotografiche sono state acquisite con una fotocamera *mirrorless* dotata di un sensore *full frame* e di un obiettivo a focale fissa da 35 mm.
3 L'acronimo SfM, *Structure from Motion*, indica una procedura fotogrammetrica basata sugli algoritmi della *Computer Vision*, capace di restituire la posizione spaziale di punti raffigurati in almeno tre immagini fotografiche prese da diverse posizioni.

risultanti dal calcolo fotogrammetrico e i dati analoghi estratti per via grafica con i procedimenti di restituzione prospettica.
È utile in questa sede richiamare brevemente il significato delle due locuzioni, per il ruolo che le due forme di orientamento assumono nel procedimento che andremo a illustrare.

Orientamento interno

L'orientamento interno di un'immagine fotografica corrisponde, nella prospettiva lineare, alla posizione del centro di proiezione rispetto al piano, detto 'quadro' o π, su cui viene a formarsi l'immagine prospettica. In fotografia, il centro di proiezione corrisponde al punto nodale dell'obiettivo[4], ossia il punto in cui le lenti invertono il cono formato dai raggi luminosi provenienti dall'esterno. Il ruolo del punto nodale è facilmente comprensibile, se si ricorre a esempi tratti dagli esperimenti ottici che precorrono la definizione della tecnica fotografica.
Le camere oscure, note e utilizzate ben prima della fotografia, erano spazi parallelepipedi delimitati da superfici opache. Un solo piccolo foro, detto 'stenopeico', permetteva alla luce di penetrare nella camera e di proiettare, sulla parete opposta a quella forata, un'immagine capovolta della scena che un osservatore, posto all'interno della camera, avrebbe potuto osservare attraverso il foro (fig. 5).
Il punto nodale delle fotocamere corrisponde, dal punto di vista proiettivo, al foro stenopeico delle camere oscure.
Anche nelle macchine fotografiche l'immagine si fissa, capovolta, sulla superficie piana del sensore o della pellicola fotografica[5].
Le camere da studio e alcune reflex di medio e grande formato permettono ancor oggi di visualizzare l'immagine inquadrata, così come essa si forma al di là del punto nodale (fig. 7).

4 Gli obiettivi hanno due punti nodali: un primo punto nodale anteriore e un secondo punto nodale posteriore. Quello che corrisponde al centro di proiezione della prospettiva è il secondo punto nodale. Per una disamina attenta e competente della propagazione geometrica della luce negli obiettivi fotografici, e delle deformazioni intrinseche dei fotogrammi, si rimanda il lettore a Carpiceci M., 1997.
5 Le macchine fotografiche analogiche utilizzate per il rilievo fotogrammetrico erano dotate di un dispositivo meccanico che metteva in trazione la pellicola per ridurne le deformazioni e conferirle una forma prossima al piano.

Fig. 5/ Illustrazione di una camera oscura. Da James Ayscough, *A short account of the eye and nature of vision. Chiefly designed to illustrate the use and advantage of spectacles*. London ,1755.

Fig. 6/ Leonardo da Vinci. Strumento prospettico usato per disegnare una sfera armillare. Codice atlantico, XV secolo.

Fig. 7/ Regolazione dell'inquadratura per la ripresa fotografica con una camera da studio.

Appare evidente l'analogia fra il fenomeno proiettivo della camera oscura e quello della prospettiva. Proviamo ad immaginare che il piano sui cui si forma l'immagine prospettica non si trovi al di là del foro, ma sia un piano trasparente interposto fra il foro e la scena da raffigurare. Un noto schizzo di Leonardo da Vinci illustra un disegnatore che fissa la scena su un piano posto davanti all'occhio (fig. 6). L'immagine che si formerà sul piano trasparente sarà equivalente a quella della camera oscura, a meno dell'assenza di inversione e di un fattore omogeneo di ingrandimento o riduzione, regolato dalla distanza fra l'occhio (il foro) e il piano che riceve l'immagine.

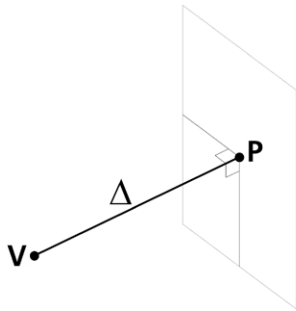



Fig. 8 / Posizione del centro di proiezione rispetto al quadro.

Cosa definisce dunque l'orientamento interno?
Nella prospettiva lineare, esso definisce la posizione del centro di proiezione *V*, che appartiene a una retta ortogonale al quadro; il punto di intersezione fra questa retta e il quadro è un punto *P*, detto 'principale'; la distanza $\overline{VP}$ fra il centro di proiezione e il punto principale è detta 'distanza principale' Δ (fig. 8).
In fotografia, l'orientamento interno definisce la distanza del punto nodale dalla superficie piana sensibile (pellicola o sensore) che registra l'immagine. La retta ortogonale alla superficie piana sensibile corrisponde all'asse dell'obbiettivo della camera fotografica. Questa retta interseca la superficie piana sensibile in un punto che conserva la denominazione assunta nella prospettiva e viene pertanto detto, 'punto principale'.
La distanza fra il punto nodale e il punto principale è la distanza focale dell'obiettivo.
Nell'analogia fra immagine fotografica e prospettiva lineare, il punto nodale coincide con il centro di proiezione, e il quadro π è parallelo alla superficie piana sensibile; la distanza focale viene di solito indicata dalla lettera *f* (figg. 9-10).
Nei manuali di geometria descrittiva, il punto principale non ha una denominazione univoca; in questa sede sarà indicato con la lettera *P*[6].
Nelle fotografia acquisite con camere standard, il punto principale si trova in prossimità del punto baricentrico del rettangolo che delimita l'immagine[7].
L'eccentricità del punto principale è di solito alquanto limitata ed è dovuta a piccole imperfezioni sempre presenti nelle immagini fotografiche, che non soddisfano mai esattamente le condizioni della prospettiva lineare.
L'immagine scelta per illustrare le relazioni proiettive tra fotografia e prospettiva è stata inserita, come già accennato in un progetto fotogrammetrico.

6 Ad oggi non esiste una convenzione condivisa sulla denominazione degli enti geometrici che compaiono in una prospettiva. Il punto principale è spesso denominato O_0, altre volte P. I punti di fuga sono spesso indicati con il simbolo F' seguito da un suffisso, altre volte con il simbolo I'. In questa sede, fin dove utile, saranno adottate le convenzioni più diffuse e quelle che per analogia richiamano con maggiore immediatezza gli enti corrispondenti.
7 Un'accentuata eccentricità del punto principale rispetto al centro geometrico dell'immagine si verifica se l'immagine su cui si opera è una riproduzione a stampa sottoposta a ritagli editoriali, ovvero se la foto è stata acquisita con una camera da studio. Alle fotografie acquisite con camere da studio sarà dedicato il quarto capitolo.

Fig. 9/ Schema delle relazioni proiettive fra punto nodale, superficie sensibile della macchina fotografica e superficie simmetricamente interposta tra il punto nodale e la scena. Si noti l'inversione dell'immagine catturata dalla camera.

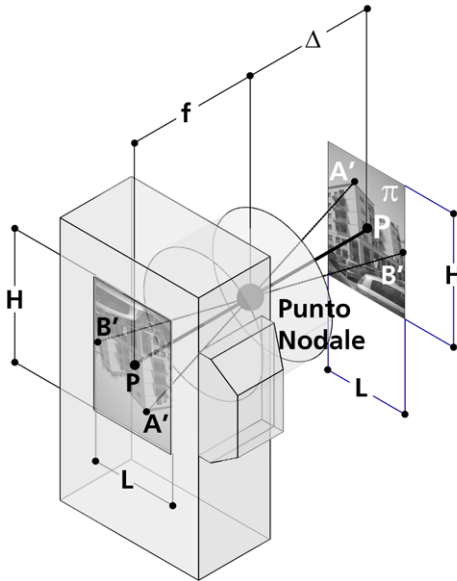
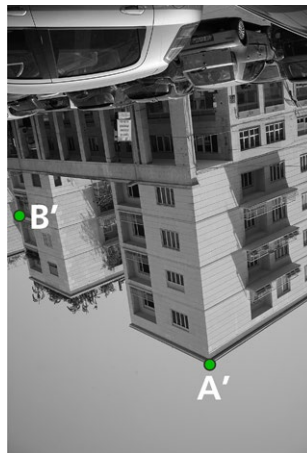
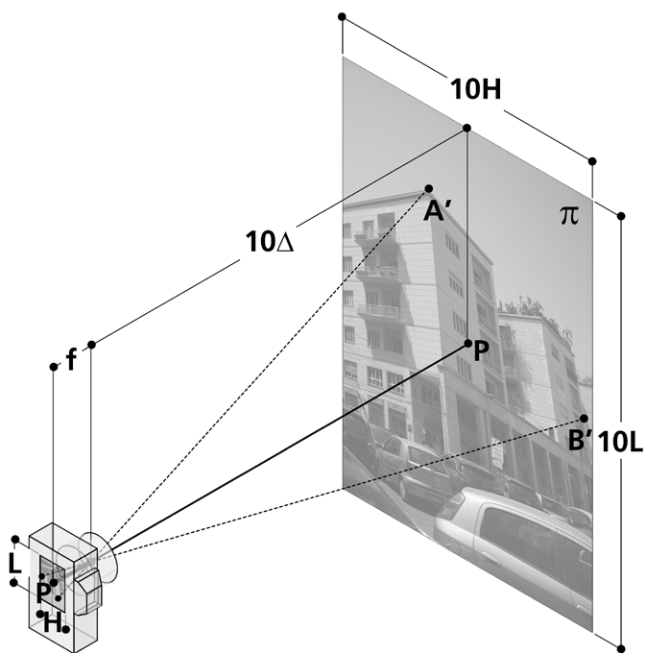
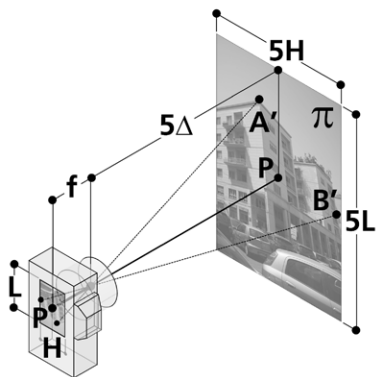



Fig. 10/ Immagine fotografica scelta come esempio e la copia ruotata che si forma sulla superficie sensibile.

Il calcolo eseguito dal software ha restituito l'orientamento interno dell'immagine: il punto principale ha una trascurabile eccentricità rispetto al centro geometrico del fotogramma: cx: = -0,15 mm, cy= -0,23 mm, mentre la lunghezza focale calcolata risulta 36,2 mm, 1,2 mm più lunga di quella nominale[8].

8 La differenza di 1,2 mm fra la lunghezza focale nominale dell'obiettivo e quella stimata dal software di fotogrammetria non è da considerarsi anomala, quando si utilizzano ottiche standard. Nelle camere utilizzate per applicazioni fotogrammetriche professionali, l'obiettivo è corredato da un certificato di calibrazione che riporta, con precisioni nell'ordine del centesimo di millimetro, la distanza focale.

Fig. 11/ Gli ingrandimenti con fattore 5 e con fattore 10 dell’immagine fotografica e della distanza principale, con punto base nel punto nodale, non alterano la relazione proiettiva con l’immagine registrata dalla macchina fotografica.

Quando un'immagine è disponibile nel suo pieno formato ed è stata acquisita con una camera standard assumeremo che il punto principale coincida con il centro geometrico dell'immagine, trascurando le piccole eccentricità del punto principale riconducibili a imperfezioni delle ottiche e della camera, poiché difficili da determinare con le costruzioni grafiche della prospettiva lineare.
Per ciò che riguarda la lunghezza focale dell'obiettivo utilizzato, avremo modo di notare più avanti che anche le costruzioni grafiche della restituzione prospettica condurranno alla determinazione di una lunghezza focale maggiore di quella dichiarata dal produttore, allineandosi agli esiti del calcolo fotogrammetrico. Ci si attende, ovviamente, che ulteriori restituzioni condotte su immagini acquisite con lo stesso obiettivo, producano una distanza principale della medesima lunghezza.
Va osservato, già adesso, anticipando la descrizione delle caratteristiche proiettive della prospettiva, che qualsiasi ingrandimento o riduzione dello schema prospettico, costituito dall'immagine, dal centro di proiezione *V* e dal punto principale *P*, eseguito assumendo il punto nodale *V* come punto di riferimento, non modifica l'esito della proiezione (fig. 11). Questa proprietà è particolarmente rilevante ai fini di questa trattazione, poiché permetterà di assegnare allo schema prospettico la dimensione più conveniente per l'esecuzione della restituzione.
La stessa proprietà vale per la scena tridimensionale oggetto della rappresentazione prospettica, che può essere ingrandita o ridotta con riferimento a *V* senza mutare l'esito della proiezione; questa proprietà non sarà tuttavia utilizzata in questo studio, poiché gli strumenti di rappresentazione digitale offrono uno spazio di lavoro virtualmente illimitato, che non richiede la riduzione dimensionale della scena da restituire.

Orientamento esterno

L'orientamento esterno di un'immagine fotografica indica la posizione del punto nodale e la direzione dell'asse dell'obbiettivo nella scena ritratta dall'immagine. L'orientamento esterno, insieme all'orientamento interno, permette di ricostruire la corretta relazione proiettiva fra l'immagine fotografica e la scena in essa raffigurata.

Possono darsi due casi: a) la scena raffigurata nell'immagine non esiste più; b) la fotografia raffigura un contesto esistente, ovvero un contesto parzialmente modificato, del quale sopravvivono *in situ* alcuni elementi.

I casi studio descritti nel quinto capitolo esemplificheranno queste possibilità.

Qui basta dire che, affinché il prodotto di una ricostruzione con la restituzione prospettica sia misurabile, occorre conoscere almeno la misura di un segmento raffigurato nell'immagine; affinché la ricostruzione sia orientata, occorre che siano rappresentate nell'immagine alcune rette verticali.

In questo paragrafo ci limiteremo a considerare il problema dell'orientamento esterno di una fotografia di un contesto esistente e misurabile.

In questo caso il processo di orientamento esterno può essere facilmente condotto, sia con gli strumenti semiautomatici della fotogrammetria, che con le costruzioni grafiche della prospettiva lineare.

In questo paragrafo ci limiteremo a considerare soltanto l'orientamento esterno calcolato per via fotogrammetrica, rinviando al prossimo capitolo la trattazione dell'orientamento con costruzioni grafiche.

Al fine di riferire la posizione dell'immagine al sistema di coordinate adottato per il rilievo, il modello fotogrammetrico è stato riferito alla scansione laser attribuendo, ad alcuni punti ben riconoscibili sulle immagini[9], le coordinate tridimensionali estratte dalla nuvola di punti (figg. 12-15).

9 Per garantire la misurabilità del modello è sufficiente conoscere le coordinate di due punti, ovvero la loro distanza. Affinché il modello sia riferito a un rilievo topografico o laser scanning, occorrono le coordinate di almeno tre punti.

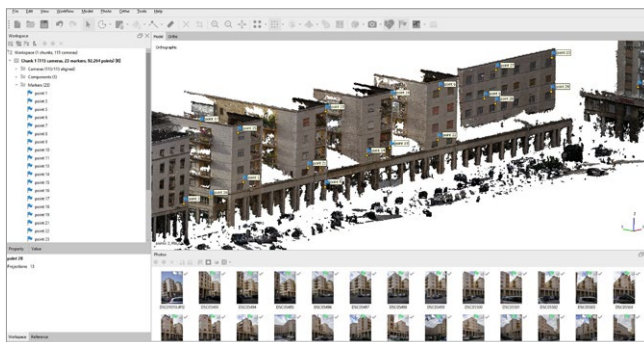
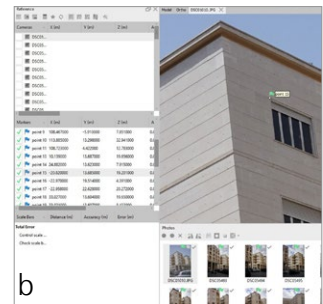
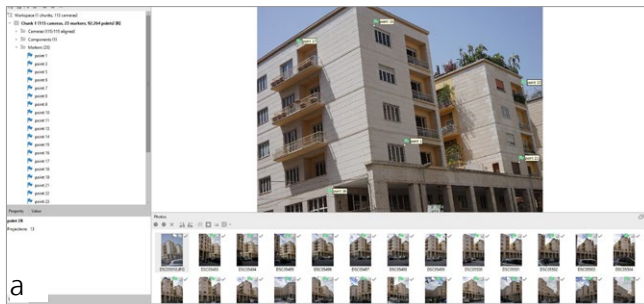
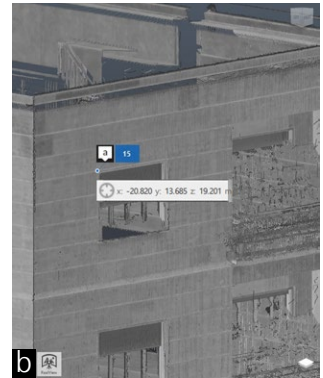
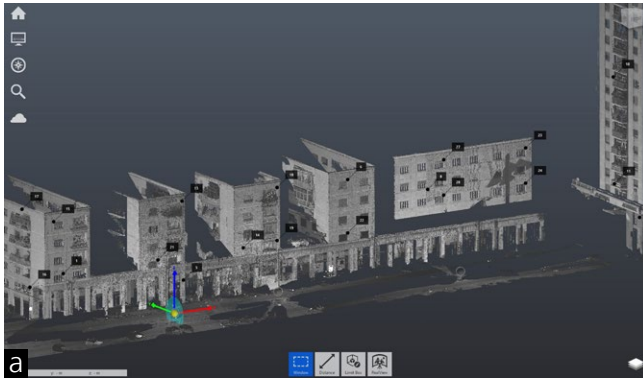



Fig. 12/ *a)* Individuazione, sulla nuvola di punti acquisita con laser scanner, di alcuni punti ben riconoscibili nelle immagini fotografiche. *b)* Estrazione delle coordinate.

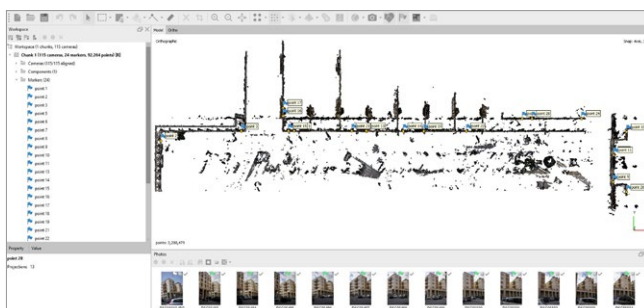
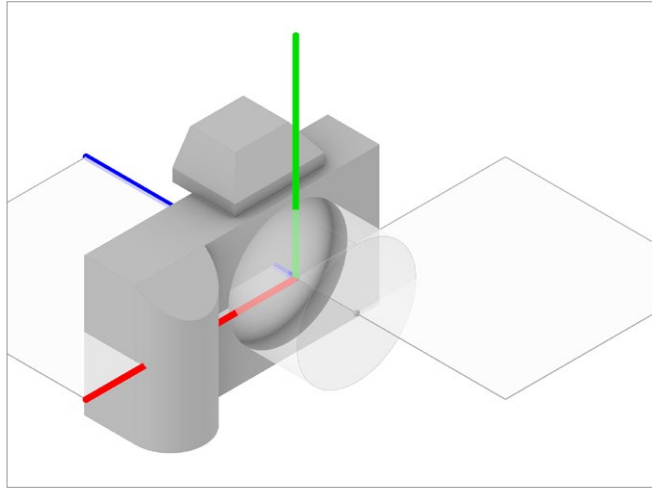



Fig. 13/ *a)* Individuazione dei punti sulle immagini fotografiche. *b)* Attribuzione delle coordinate estratte dal rilievo con laser scanner.

Fig. 14/ Vista ortografica assonometrica della nuvola rada fotogrammetrica con i marker individuati sulle immagini fotografiche.

Fig. 15/ Viste ortografica superiore della nuvola rada fotogrammetrica; si noti la corrispondenza con l'orientamento della nuvola di punti acquisita con laser scanner.

Fig. 16/ Terna di assi cartesiana associata alla camera.

Il calcolo fotogrammetrico dell'orientamento esterno dell'immagine restituisce due terne di valori:
a) le tre coordinate *x*, *y* e *z* del punto nodale dell'obiettivo;
b) i tre angoli di rotazione ω (omega), ϕ (phi) e κ (kappa)[10], che definiscono la direzione dell'asse presa, ossia della linea d'asse dell'obbiettivo.
La rotazione ω viene eseguita intorno all'asse *x*; la rotazione ϕ intorno all'asse *y* e la rotazione κ intorno all'asse *z*.
Le rotazioni vengono applicate rigorosamente in sequenza e si riferiscono agli assi nella direzione che essi assumono nel corso del processo[11].
Vediamo adesso in che modo la terna di assi è riferita al corpo rigido costituito dalla macchina fotografica (fig. 16):
i) l'origine della terna di assi è nel punto nodale dell'obiettivo;
ii) l'asse di presa corrisponde all'asse *z* e la superficie piana sensibile corrisponde al piano *xy*;
iii) la direzione positiva dell'asse *z* va dal punto nodale verso la superficie piana sensibile;
iv) l'asse *x* è parallelo al lato maggiore del rettangolo che delimita l'immagine, *y* al lato minore.

10 Gli angoli che definiscono la posizione di un sistema di riferimento xyz solidale con un corpo rigido, sono detti 'euleriani'. L'orientamento del corpo rigido (e del sistema xyz a esso associato) viene definito attraverso una serie di rotazioni, a partire da un sistema di riferimento fisso. I due sistemi coincidono nell'origine. Fonte: https://it.wikipedia.org/wiki/Angoli_di_Eulero.
11 Il processo può essere così riassunto: la prima rotazione, ω, viene eseguita intorno all'asse *x*; a seguito di questa prima rotazione cambiano le direzioni degli assi *y* e *z*. La seconda rotazione ϕ, intorno all'asse *y* modificato dalla rotazione ω, cambia le direzioni di *x* e *z*; la terza rotazione, κ, intorno all'asse z modificato dalle rotazioni ω e ϕ, cambia le direzioni di *x* e *y*.

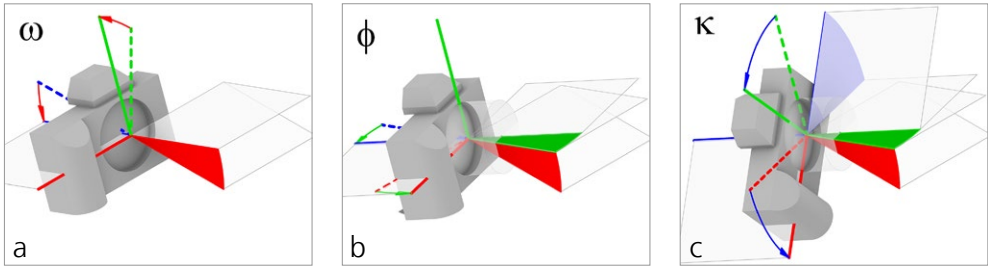



Fig. 17/ *a)* Rotazione antioraria ω = -20°. *b)* Rotazione antioraria ϕ = +20°. *c)* Rotazione oraria κ = -45°.

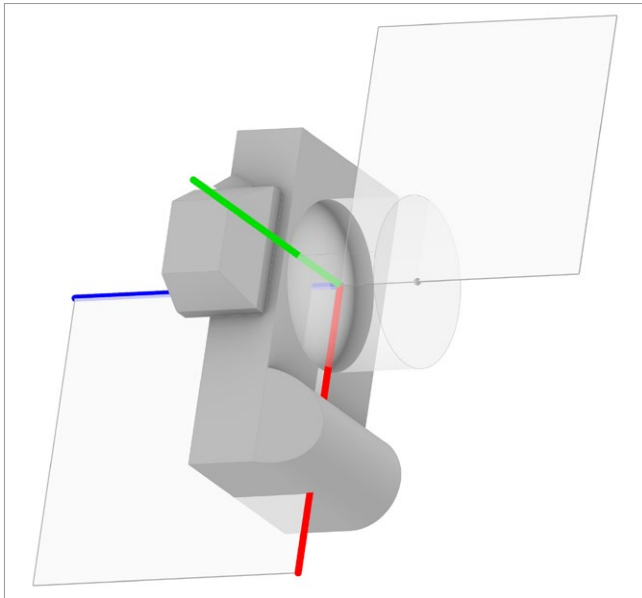



Fig. 18/ Orientamento della camera e dell'asse di presa.

Gli schemi riportati nella pagina a fianco illustrano una simulazione del posizionamento dell'asse di presa, nel caso in cui gli angoli assegnati siano $\omega = +20°$, $\phi = +20°$ e $\kappa = -45°$ (figg. 17-18).
Gli angoli hanno segno positivo se la rotazione ha verso antiorario rispetto a un osservatore che ha i piedi sull'origine degli assi e il capo sulla parte positiva dell'asse di rotazione.
Nelle immagini, gli assi sono rappresentati a tratteggio nella posizione che precede la rotazione.
Procediamo adesso a ricostruire l'orientamento dell'immagine fotografica scelta come esempio, sulla base dei dati estratti dal calcolo fotogrammetrico.

Posizioniamo il modello della camera nell'origine degli assi del sistema di coordinate cui sono riferiti la nuvola di punti e il modello della corte aperta.
Nella posizione iniziale, i tre assi associati alla camera coincidono con gli omonimi assi del sistema di riferimento: l'asse *x* è parallelo ai fronti lunghi della piazza, l'asse *y* è parallelo ai lati corti, l'asse *z* è verticale e ha direzione positiva verso l'alto.
Ne consegue che l'asse di presa della camera risulta rivolto verso il basso (fig. 19a-b). Procediamo dunque a eseguire le tre rotazioni nella sequenza ω, ϕ, κ, secondo i valori prodotti dal calcolo fotogrammetrico: ω = 113.996°, ϕ = -48.3136°, e κ = -78.7733° (figg. 20a-b e 21a).
Al termine del processo, la camera e l'asse di presa assumono il corretto orientamento nello spazio virtuale rappresentato dal modello (fig. 21b).
Rimane da definire soltanto la posizione.
A tal fine, trasliamo la terna di assi per portare l'origine sul punto di coordinate *x* = -47.843 m, *y* = -10.271 m, *z* = -0.879 m, calcolato dal software di fotogrammetria[12] (fig. 22a-b).
La camera è così correttamente posizionata nello spazio virtuale della nuvola di punti e del modello digitale.
Si è dunque proceduto a verificare visivamente la corrispondenza fra l'immagine prospettica catturata dal sensore e la scena reale, raffigurata dalla nuvola di punti e dal modello digitale.
Come già annunciato, l'immagine interposta fra il punto nodale e la scena reale, simmetrica all'immagine capovolta registrata dal sensore o dalla pellicola, è stata ingrandita assumendo come riferimento il punto nodale.
Nel software di rappresentazione digitale utilizzato per tutte le applicazioni presentate in questo studio[13], la corrispondenza proiettiva fra fotografia e modello può essere verificata in due modi.

Fig. 19 (pagina successiva)/ *a)* Posizionamento della camera secondo gli assi cartesiani di riferimento della nuvola di punti e del modello. *b)* Le dimensioni del modello della camera sono $33.\overline{3}$ volte maggiori del reale. Il sensore, che nella realtà misura 24 x 36 mm, è rappresentato da un rettangolo di dimensioni 80 x 120 cm.

Fig. 20 (pagina successiva)/ *a)* Rotazione ω intorno all'asse *x*. *b)* Rotazione ϕ introno all'asse *y*.

Fig. 21 (pagina successiva)/ *a)* Rotazione κ intorno all'asse *z*. *b)* Orientamento finale della camera.

Fig. 22 (pagina successiva)/ *a)* Posizione dell'origine del sistema di riferimento e del punto nodale risultante dal calcolo fotogrammetrico. *b)* Traslazione del modello della camera sulla posizione del punto nodale.

12 L'elaborazione del progetto fotogrammetrico è stata realizzata con il software Agisoft Metashape.
13 I modelli e le restituzioni grafiche che illustrano questo studio sono stati prodotti con il software McNeel Rhinoceros 6.0.

a
b
ω
ω
a
ϕ
ϕ
b
κ
a
b
a
b

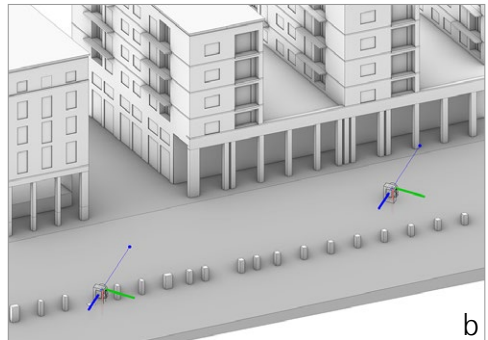
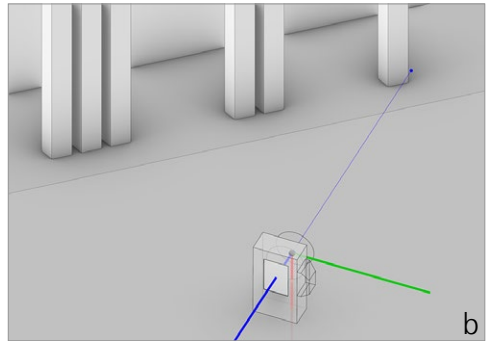
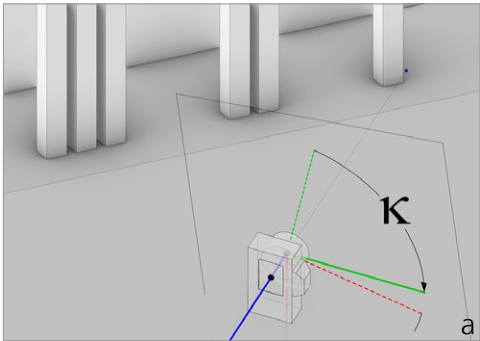
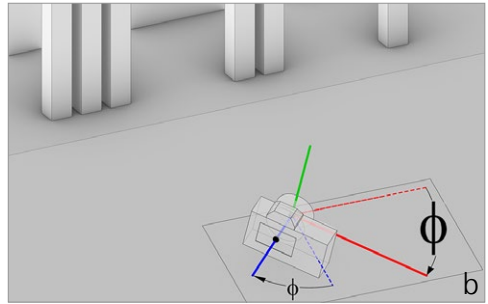
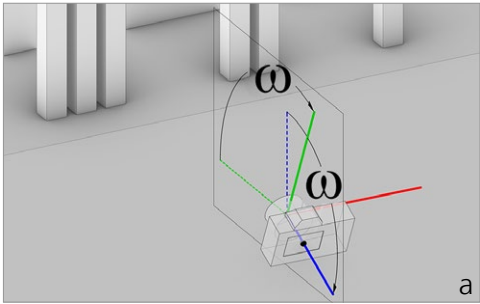
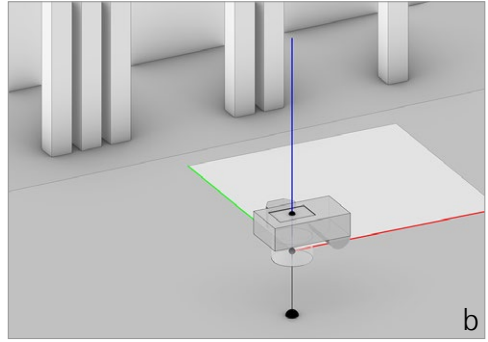
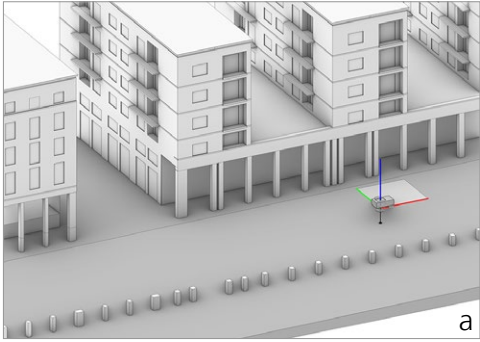
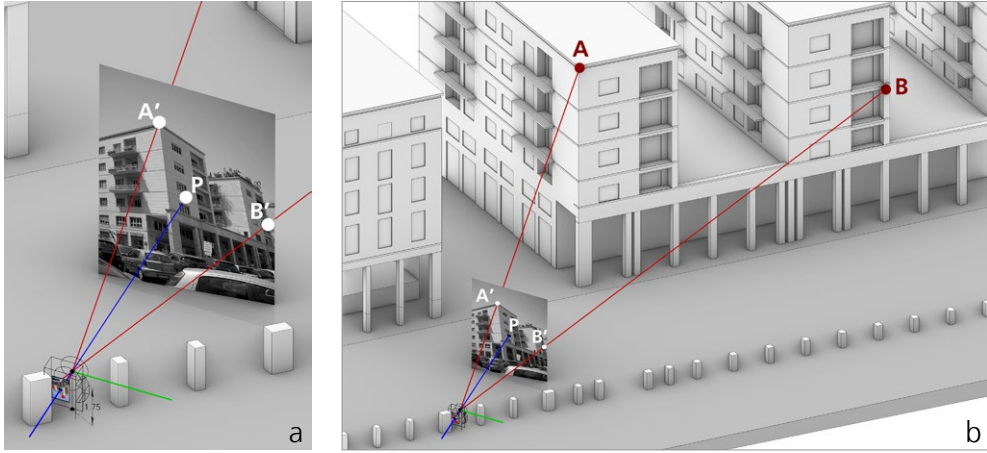



Fig. 23/ *a-b)* Verifica della corrispondenza proiettiva fra immagine fotografica e modello estratto dalla nuvola di punti. L'immagine fotografica è $333.\overline{3}$ volte maggiore dell'immagine del sensore, pari pertanto a 8 x 12 m.

La prima verifica è stata condotta tracciando rette che passano per il punto nodale e per alcuni punti del modello, ad esempio *A* e *B*, e verificando se queste rette intersecano il piano della fotografia in corrispondenza delle immagini dei punti (fig. 23).
Una seconda verifica, di carattere visivo, viene eseguita controllando la sovrapposizione fra la fotografia e l'immagine della nuvola di punti o del modello, vista dal punto nodale. Questa verifica è stata eseguita importando, nel progetto fotogrammetrico, la nuvola di punti acquisita dallo scanner e impostando una vista prospettica dal punto nodale della foto scelta come esempio (fig. 24).
La stessa verifica è stata ripetuta con il software di disegno e modellazione, posizionando una camera virtuale nel punto nodale e assegnando a essa la direzione di presa e la lunghezza focale restituiti dal processo fotogrammetrico. Da ora in avanti ci riferiremo a questo tipo di vista utilizzando la locuzione 'vista vincolata'.
Il software consente di attribuire all'immagine un fattore di trasparenza regolabile, permettendo così di verificare la sovrapposizione fra la vista vincolata degli elementi del modello tridimensionale e l'immagine fotografica (fig. 25).

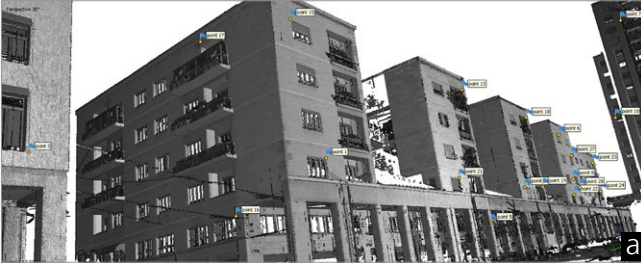



Fig. 24/ *a-b)* Verifica della corrispondenza visiva fra nuvola di punti e immagine fotografica nel software di fotogrammetria SfM.

Fig. 25/ Verifica della corrispondenza visiva nel software di modellazione, attraverso la sovrapposizione fra immagine fotografica e vista vincolata del modello digitale della corte.

Vedremo più avanti che tale possibilità sarà di grande ausilio nelle operazioni di restituzione.
In questo paragrafo è stato presentato il contesto urbano scelto come caso studio e sono stati introdotti alcuni concetti fondamentali: i) la quasi piena corrispondenza proiettiva fra immagine fotografica

e prospettiva lineare; ii) l'orientamento interno ed esterno di una prospettiva e di un'immagine fotografica. La trattazione è stata sviluppata con l'ausilio di un modello digitale del caso studio, costruito su una nuvola di punti prodotta da un rilievo con laser scanner. L'immagine presa in considerazione è stata estratta da un gruppo di circa 150 fotografie della corte aperta, elaborato con strumenti di fotogrammetria SfM; il software ha restituito i parametri di orientamento esterno dell'immagine (posizione del centro di presa e direzione dell'asse di presa) e i dati di orientamento interno (posizione del punto principale e lunghezza focale). È stata infine eseguita una doppia verifica della corrispondenza proiettiva fra immagine e modello digitale.
L'immagine scelta in questo paragrafo sarà utilizzata, nei paragrafi successivi, per: i) descrivere gli elementi che strutturano la prospettiva (punti di fuga, rette di fuga); ii) determinare, con le costruzioni grafiche della prospettiva lineare, l'orientamento interno ed esterno dell'immagine, e verificarne la corrispondenza con i parametri omologhi, calcolati con procedure fotogrammetriche.
Il confronto fra gli esiti della restituzione prospettica e i dati calcolati dal software di fotogrammetria, molto più affidabili delle costruzioni grafiche della prospettiva lineare, mostrerà che l'uso di strumenti digitali per la rappresentazione ha sensibilmente migliorato l'attendibilità della restituzione da immagini fotografiche.
È utile, a conclusione di questo paragrafo, ribadire che in nessun modo si intende, in questa sede, proporre la restituzione prospettica da fotografia come strumento per il rilievo dell'esistente, perché comunque distante dai livelli di accuratezza (in particolare per il rilievo di forme non geometriche) e dalla semplicità e rapidità delle ormai diffuse tecnologie laser scanning e fotogrammetriche SfM.

La restituzione prospettica da fotografia viene proposta ‘solo’ come strumento per la ricostruzione di edifici e scenari urbani fotografati e non più esistenti, o radicalmente modificati.
Ciò che distingue questo contributo dai numerosi e preziosi studi sulla restituzione prospettica che lo precedono è l’uso degli strumenti digitali per il disegno e la modellazione, sia nelle fasi di costruzione del modello prospettico, che nelle fasi di restituzione degli edifici raffigurati nella fotografia.

Gli enti geometrici della prospettiva

I testi sulla restituzione prospettica dedicano di solito la parte introduttiva a richiami generali sulla costruzione della prospettiva, al fine di fornire al lettore gli elementi base del linguaggio e delle prassi operative della costruzione prospettica, e permettergli così di orientarsi nel procedimento inverso di restituzione.
In questa sede, come già detto, la descrizione della costruzione prospettica si uniformerà alle più recenti trattazioni scientifiche sull’argomento, utilizzando la grafica tridimensionale per una migliore comprensione degli elementi base della costruzione prospettica.
In assenza di un generale accordo su una simbologia univoca, i simboli utilizzati in questa sede potranno differire in alcuni casi da quelli utilizzati in testi dedicati alla scienza della rappresentazione; ciò potrà creare un iniziale disorientamento per i lettori che hanno già familiarità con l’argomento.
La scelta di simboli diversi nasce dal desiderio di sottolineare la flessibilità dei processi e dei ruoli di ciascun ente geometrico, ed evitare quei simboli che attribuiscono ad alcuni enti un carattere di univocità, che nuoce alla comprensione della generalità delle relazioni fra enti geometrici e, così facendo, impoverisce l’approccio al disegno riducendolo a un insieme di regole incomprensibili.

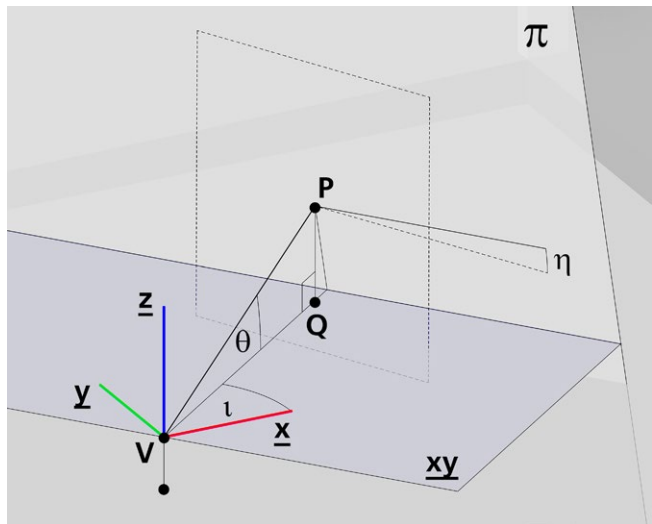
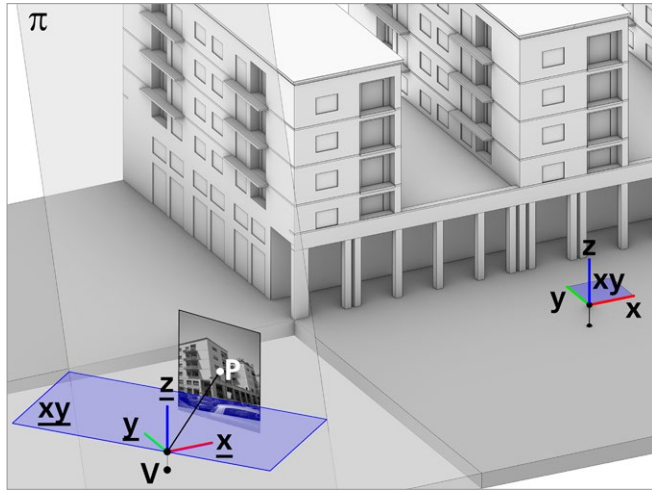
Un esempio di trattazione univoca di un ente geometrico è la 'linea d'orizzonte', luogo geometrico dei punti di fuga di tutte le rette orizzontali, ereditata da una tradizione plurisecolare. La linea d'orizzonte, e con essa le rette orizzontali, hanno assunto, nella prospettiva lineare, un ruolo privilegiato che relega le altre direzioni di rette a una condizione di 'eccezionalità'.
Al fine di favorire una maggiore generalità nella rappresentazione di piani e rette non orizzontali, e dimostrare che le procedure di rappresentazione di enti geometrici orizzontali sono del tutto identiche a quelle che si utilizzano per altri piani, la 'linea d'orizzonte' sarà indicata dal simbolo *fxy'*, ossia retta di fuga dei piani che hanno la giacitura del piano orizzontale *xy*, e luogo geometrico dei punti di fuga di tutte le rette che sono parallele o appartengono al piano *xy*.
Questa denominazione permetterà di utilizzare le proprietà e le procedure applicate ai piani orizzontali, e alle rette ad essi ortogonali, anche ai piani verticali *xz* e *yz*, e ancora a qualsiasi altro piano e alle rette a esso ortogonali[14].
Per la spiegazione del procedimento di costruzione della prospettiva e, più avanti, del processo inverso di restituzione, ci serviremo della scena urbana e dell'immagine fotografica introdotte nel paragrafo precedente.
L'immagine, correttamente posizionata nel modello digitale del complesso architettonico, è una prospettiva pressoché lineare, in quanto debolmente affetta da quelle deformazioni geometriche legate, come già accennato, alle caratteristiche dell'obiettivo fotografico.
Trattando dell'orientamento interno dell'immagine fotografica e dell'equivalenza con lo schema prospettico, sono stati già introdotti due elementi fondamentali della costruzione prospettica: i) il piano

14 La simbologia utilizzata per indicare gli enti geometrici rispetta una convenzione ampiamente accettata: i punti sono denominati con le lettere maiuscole dell'alfabeto (*V*, *A*, *B*, ecc.); le rette sono denominate con le lettere minuscole dell'alfabeto (*f*, *r*, *s*, ecc.); i piani e gli angoli sono denominati con le lettere minuscole dell'alfabeto greco (π, ω, ϕ, κ, ecc.). Un punto proiettato sul quadro mantiene il proprio nome con l'aggiunta di un apice (*A'*, *B'*, ecc.); lo stesso vale per le rette (*f'*, *r'*, ecc.).

detto ‘quadro’, indicato con la lettera π, sul quale si forma l’immagine prospettica; ii) un punto, detto centro di proiezione *V*, da cui si dipartono le rette cui appartengono i punti salienti della scena, e i piani che intercettano le rette che definiscono il volume dei solidi raffigurati nell’immagine. I piani e le rette che contengono il punto *V* sono detti ‘proiettanti’; il punto di intersezione fra π e una retta proiettante è la proiezione del punto che appartiene alla retta; le rette di intersezione fra π e i piani proiettanti sono le proiezioni delle rette che appartengono a tali piani.
Nell’esempio già presentato, la retta proiettante che passa per il punto *A* interseca il quadro nel punto *A’* e quella che passa per *B* e interseca il quadro in *B’*[15].
Un altro elemento importante della prospettiva, anch’esso introdotto nel paragrafo che precede, è il punto principale, denominato *P*, che si genera all’intersezione con π della retta proiettante a esso ortogonale.
La distanza principale $\overline{VP}$ viene indicata, come anticipato, dalla lettera Δ. Dato il punto *P* e la distanza Δ, è possibile determinare la posizione di *V* rispetto al quadro π.
Data la posizione di *V* e la distanza principale, il processo di costruzione della prospettiva conduce al disegno della scena urbana scelta come caso studio.
In questa sede, invece, la prospettiva è già fissata dall’immagine fotografica.
La descrizione che segue, incentrata sulle proprietà degli enti geometrici che strutturano la prospettiva, non mira dunque alla realizzazione di un disegno, ma solo a illustrare il ruolo di ciascun ente e le relazioni che lo legano ad altri enti.
Iniziamo dall’esplorazione della giacitura assunta dall’immagine a seguito delle rotazioni ω, ϕ e κ, dando per assunta la traslazione che assegna al punto *V* le coordinate calcolate dal software di fotogrammetria.

15 In realtà, tutti i punti di una retta proiettante hanno proiezione nell’unico punto in cui essa interseca π, e tutte le rette di un piano proiettante hanno proiezione coincidente con la sua retta di intersezione con π. Tale proprietà spiega il motivo per cui, come già accennato, la scalatura del modello prospettico o della scena rispetto a *V*, non altera l’esito della proiezione prospettica.

Fig. 26/ Posizione dell'immagine fotografica nel modello digitale, introduzione del piano <u>xy</u> e della terna di assi con origine in *V*.

Fig. 27/ Angoli che definiscono la posizione dell'immagine attraverso la rotazione η intorno all'asse di presa, all'inclinazione θ dell'asse di presa rispetto al piano <u>xy</u>, e all'angolo ι che la proiezione su <u>xy</u> dell'asse di presa forma con la retta <u>x</u>. Il bordo dell'immagine è rappresentato a tratteggio.

Le rotazioni ω, ϕ e κ, pur concorrendo alla definizione della direzione dell'asse di presa e della rotazione dell'immagine intorno a esso, non dicono granché sulla relazione fra l'orientamento dell'immagine e la posizione della camera al momento dello scatto.
Assegnata dunque la posizione della camera risultante dall'orientamento esterno, conduciamo per il punto *V* un piano parallelo a *xy*, che chiameremo <u>xy</u>, e posizioniamo, con origine in *V*, una terna di

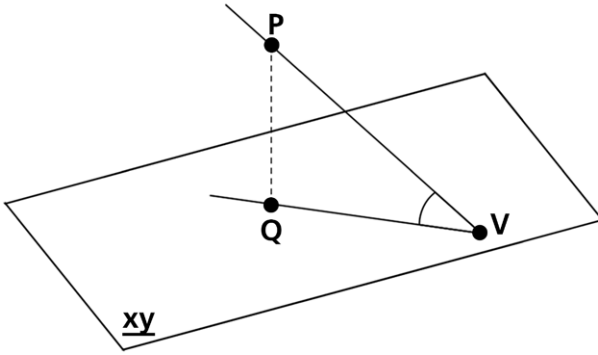



Fig. 28/ Da Euclide 'Elementi', Libro XI Definizione V. Inclinazione di una retta rispetto a un piano: "se si conduce una retta perpendicolare dal termine superiore della retta al piano, e dal punto così originatosi (piede della perpendicolare) si traccia la congiungente al termine inferiore della retta sul piano, è l'angolo che è formato dalla congiungente così condotta e dalla retta sovrastante".

rette $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$, parallele agli assi cui sono state riferite la nuvola di punti e il modello digitale.
Costruiamo inoltre il piano π definito dall'immagine (fig. 26). Al fine di stabilire la posizione della camera al momento dello scatto, iniziamo dalla misura dell'angolo di rotazione η (eta) intorno all'asse di presa; l'angolo viene misurato sul quadro π da due rette che passano per il punto *P*: i) una retta parallela al piano $\underline{xy}$, dunque parallela alla retta di intersezione fra π e $\underline{xy}$; ii) una retta parallela al lato corto dell'immagine poiché l'immagine ha orientamento verticale[16]. Il secondo angolo che introduciamo, θ (teta), misura la pendenza dell'asse di presa $\overline{VP}$ rispetto al piano $\underline{xy}$; θ è l'angolo misurato in *V* dall'asse di presa e dalla sua proiezione ortogonale su $\underline{xy}$, ossia dalla retta cui appartengono i punti *V* e *Q* (figg. 27-28). Con il simbolo ι (iota) indichiamo, infine, l'angolo che l'asse *x* del sistema di riferimento forma con il piano verticale che contiene l'asse di presa, misurato sul piano *xy* dall'angolo che l'asse *x* forma con la retta che passa per *V* e *Q*.
La definizione dei tre angoli η, θ e ι impone alcune considerazioni; iniziamo dall'angolo di rotazione della camera intorno all'asse di presa, cui è dovuta l'inclinazione della retta di fuga fxy' rispetto al riquadro che delimita l'immagine.

16 Nell'inquadratura orizzontale, detta *landscape*, le rette verticali sono approssimativamente parallele ai lati brevi del rettangolo che delimita l'immagine, mentre nell'inquadratura verticale, detta *portrait*, le rette verticali sono approssimativamente parallele ai lati lunghi.

Fig. 29/ *a)* Inquadratura verticale *portrait* con angolo θ nullo. *b)* Inquadratura orizzontale *landscape* con angolo θ nullo.

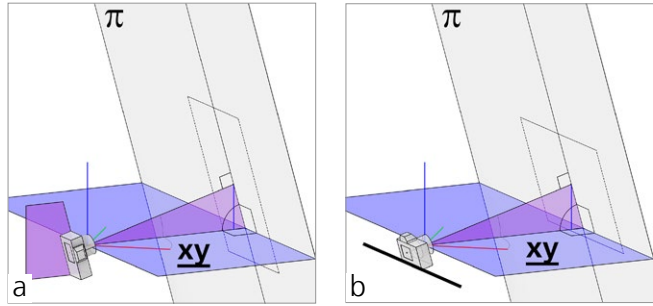
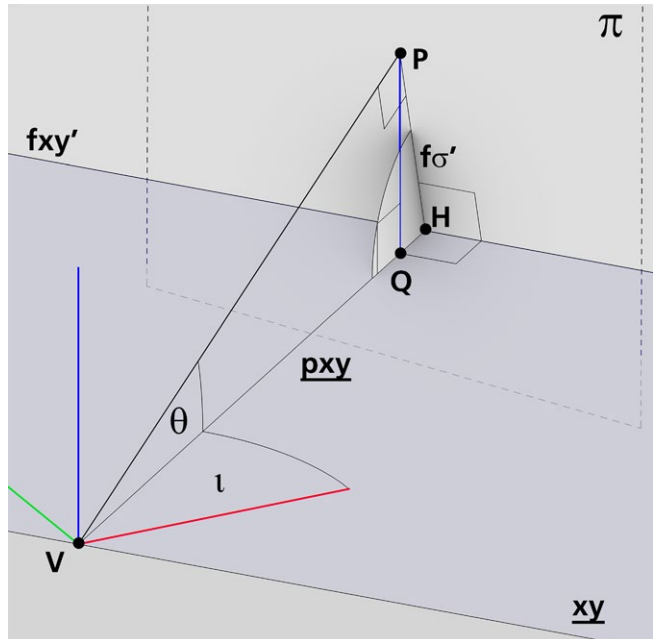



Fig. 30/ Angoli che definiscono l'orientamento dell'asse di presa.

In una foto con inquadratura verticale *portrait*, l'angolo η risulterebbe nullo se, al momento dello scatto, la base d'appoggio della camera avesse giacitura verticale, indipendentemente dall'inclinazione dell'asse di presa (fig. 29a).
Per contro, nel caso di una fotografia con inquadratura orizzontale *landscape*, l'angolo η risulterebbe nullo se uno dei lati lunghi della base d'appoggio della camera avesse direzione orizzontale; anche in questo caso l'assunto è valido indipendentemente dall'inclinazione dell'asse di presa. (fig. 29b).

Considerata la difficoltà, sul campo, di assegnare alla camera una precisa posizione al momento dello scatto, anche con l'ausilio di un treppiede, possiamo affermare che solo in casi particolari due lati del rettangolo che delimita l'immagine risulteranno paralleli alla retta di intersezione fra $\underline{xy}$ e π.

Passiamo adesso all'angolo θ, che misura l'inclinazione verso l'alto (o verso il basso) dell'asse di presa. L'angolo si azzera se l'asse di presa della camera è perfettamente orizzontale; in questo caso il quadro è perfettamente verticale.

Ancora una volta osserviamo che tale condizione, molto comune nelle prospettive disegnate, è molto rara nelle immagini fotografiche, data la difficoltà di posizionare la camera con l'asse dell'obiettivo perfettamente orizzontale.

Il piano individuato dal triangolo che ha vertici *V*, *P*, e *Q*, introdotto poc'anzi, è ortogonale sia a $\underline{xy}$ che a π[17] e incontra in *H* la retta di intersezione tra i due piani.

Le rette che appartengono a questo piano saranno dunque perpendicolari alla retta di intersezione: se dunque consideriamo il triangolo che ha vertici *V*, *P*, e *H*, retto in *P*, l'ipotenusa $\overline{VP}$ e il cateto $\overline{PH}$ saranno ortogonali a questa retta (fig. 30).

L'angolo in *H* sarà un angolo acuto di ampiezza pari a 90°-θ. Quest'angolo misura l'inclinazione di π rispetto a $\underline{xy}$[18]; possiamo dunque constatare che quando l'asse di presa è inclinato verso l'alto, o verso il basso, il quadro π forma con il piano $\underline{xy}$ un angolo non retto.

L'angolo ι, infine, misura l'orientamento dell'asse di presa rispetto al sistema di coordinate associato alla scena raffigurata nell'immagine.

Risulterebbe nullo se l'asse *x* del sistema di riferimento adottato, che nel nostro caso è parallelo ai lati lunghi della corte aperta, fosse parallelo alla retta $\overline{VH}$.

17 Per una disamina delle proprietà del triangolo *VPQ* ricorriamo agli Elementi di Euclide. Libro XI, Proposizione 18: *Se una retta è perpendicolare ad un piano, anche tutti i piani che passino per essa saranno perpendicolari a quello stesso piano.* Dati un piano π e una retta $\overline{VP}$, ortogonale a esso, tutti i piani che passano per $\overline{VP}$ sono ortogonali a π. Dato un piano $\underline{xy}$ e una retta $\overline{PQ}$, ortogonale a esso, tutti i piani che passeranno per $\overline{PQ}$ saranno ortogonali a $\underline{xy}$. Il triangolo *VPQ* è dunque ortogonale sia a $\underline{xy}$ che a π. La retta $\overline{VQ}$ interseca π in *H*. Il triangolo *VPH* è complanare al triangolo *VPQ* e, pertanto, è anch'esso ortogonale a $\underline{xy}$ e a π. Ancora Euclide, Libro XI_Proposizione 19: *Se due piani che si tagliano fra loro sono perpendicolari ad un piano (dato) anche la loro intersezione sarà perpendicolare a quello stesso piano.* Se $\underline{xy}$ e π sono ortogonali al piano individuato dal triangolo *VPH*, la loro retta di intersezione sarà perpendicolare a questo piano. Alla luce di quanto riportato, possiamo affermare che la retta di intersezione fra $\underline{xy}$ e π forma angoli retti con le rette cui appartengono i segmenti $\overline{PH}$ e $\overline{VH}$.

18 Euclide, Libro XI_Definizione VI: *Inclinazione di un piano rispetto a un altro piano è l'angolo acuto compreso dalle rette condotte in ciascuno dei due piani, perpendicolarmente alla loro intersezione comune per uno stesso punto (di questa).* L'angolo formato in *H* dalle rette $\overline{VH}$ e $\overline{PH}$ definisce l'inclinazione di π rispetto a $\underline{xy}$.

Rette e piani in prospettiva

Date queste premesse, avviamo la disamina della struttura dell'immagine prospettica, descrivendo la proiezione di una retta.

Scegliamo, per iniziare, la retta orizzontale che passa per il punto *A* ed è parallela all'asse *x* del nostro sistema di riferimento.

Affinché la denominazione richiami il parallelismo, chiameremo questa retta x_1. In generale, la proiezione di una retta è assegnata quando siano date le proiezioni di due punti che le appartengono.

Scelti pertanto due punti *A* e *B* sulla retta, per questi punti si tracciano due rette proiettanti che passano per *V* (fig. 31); le intersezioni fra queste rette e il quadro π saranno *A′* e *B′*, proiezioni di *A* e *B*.

La retta che passa per *A′* e *B′* sarà x_1', proiezione della retta x_1 che passa per *A* e *B* (fig. 32).

Nella pratica del disegno in prospettiva sono spesso utilizzati due punti particolari di una retta: i) il punto in cui la retta interseca il quadro, detto 'punto traccia', indicato dalla lettera *T* accompagnata dal nome della retta, in questo caso Tx_1; ii) il punto di fuga della retta. Ricordiamo che il punto di fuga di una retta è la proiezione del suo 'punto improprio'.

Il punto improprio, come la locuzione stessa indica, non è un punto localizzabile nello spazio, bensì una proprietà: la *direzione*, ossia la proprietà che la retta condivide con tutte le rette a essa parallele.

Il simbolo che indica il punto improprio è una lettera maiuscola (come per gli altri punti), accompagnata dal simbolo ∞ e da un segmento terminato da una doppia freccia, a ricordare che la direzione non ha verso. Il punto improprio della retta x_1 e di tutte le rette parallele all'asse *x* sarà pertanto indicato dal simbolo $Fx^{\infty}\swarrow\!\!\nearrow$.

Ci si potrà domandare per quale motivo si usi il termine 'punto' per indicare una direzione; la risposta sta proprio nella costruzione della prospettiva.

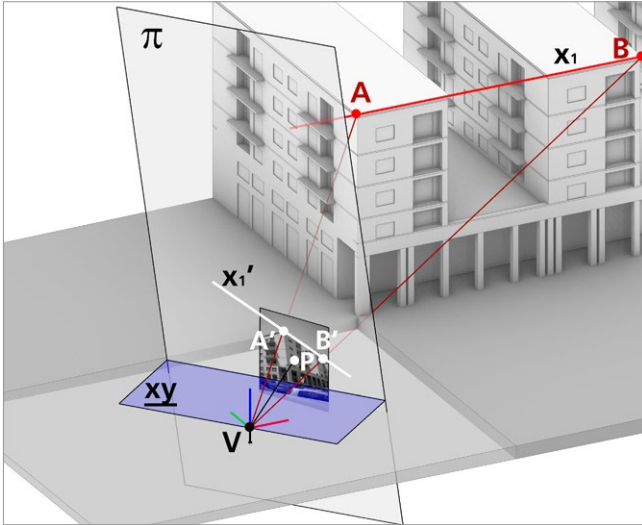



Fig. 31/ Proiezione sul quadro di una retta, date le proiezioni di due suoi punti. Vista generale dello schema prospettico.

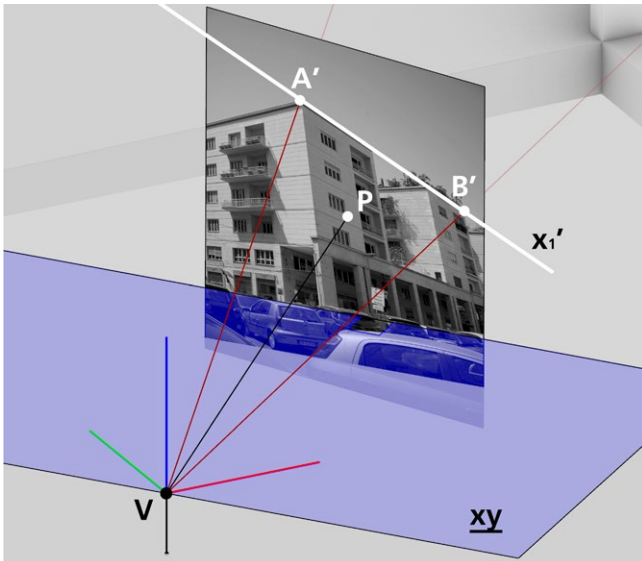
Fig. 32/ Vista di dettaglio dello schema prospettico. Si noti che l'intersezione tra le rette proiettanti e il piano dell'immagine fotografica coincidono con le immagini *A'* e *B'* dei punti *A* e *B*.

Abbiamo visto che il punto *A'*, proiezione di un punto *A*, è dato dall'intersezione con π della retta proiettante che passa per *A*.
Per proiettare un punto improprio basterà quindi condurre per *V* una retta che abbia la direzione indicata dal punto improprio e determinarne l'intersezione col quadro.

Fig. 33/ Rappresentazione prospettica di una retta x_1 dati il suo punto traccia e il punto di fuga *Fx'* che essa condivide con le rette parallele.

In altre parole, il punto di fuga di una retta sarà dato dall'intersezione con il quadro della retta proiettante a essa parallela. Detto dunque Fx^{∞}↗[19] il punto improprio della retta x_1, la sua proiezione *Fx'* sarà data dall'intersezione col quadro della retta proiettante x̲, parallela all'asse *x* (fig. 33). *Fx'* è dunque il punto di fuga della retta x_1 e di tutte le rette che sono parallele all'asse *x*. Nella prospettiva, le proiezioni di tutte le rette che sono parallele all'asse *x* convergeranno in *Fx'*. Trovato il punto di fuga *Fx'*, per rappresentare la proiezione della retta x_1 rimane da trovare il punto traccia Tx_1; per far ciò, basta prolungare la retta fino alla sua intersezione con il quadro. La retta che passa per *Fx'* e per Tx_1 è x_1'; a essa appartengono i punti *A'* e *B'*. Se adesso consideriamo la proiezione della retta x_2, che definisce il limite superiore dei pilastri del portico ed è parallela all'asse *x*, sappiamo che, trovato il punto traccia Tx_2, basterà tracciare la retta che passa per questo punto e per *Fx'* (figg. 34-35). Osserviamo che la retta x̲ appartiene al piano x̲y̲ e che, di conseguenza, il punto *Fx'* appartiene alla retta di intersezione tra x̲y̲ e π[20], alla quale non abbiamo ancora dato un nome.

19 Nei numerosi e approfonditi testi sulla prospettiva curati da Riccardo Migliari e dagli studiosi che si ispirano ai suoi insegnamenti, il punto improprio è indicato con la lettera *I*; il punto di fuga della retta x_1 assumerebbe così il nome I'x. In questa sede si è scelto di adottare, fin dove possibile, le convenzioni maggiormente diffuse in letteratura; fra queste, la scelta di indicare il punto di fuga con la lettera *F*. Useremo pertanto la lettera *F* anche per indicare il punto improprio. Altra differenza fra la simbologia usata in questo testo e quella utilizzata nei testi sopra menzionati, è la posizione dell'apice che non segue la lettera I o la lettera F, ma viene riportato dopo la completa trascrizione del nome del punto improprio: scriveremo dunque Fx' e non F'x.

20 Se una retta appartiene a un piano, essa intersecherà un altro piano in un punto che appartiene alla retta di intersezione tra i due.

Fig. 34/ Rappresentazione prospettica di una retta x_2 dati il suo punto traccia e il punto di fuga che essa condivide con le rette a essa parallele. Si noti l'appartenenza di *Fx'* alla retta di intersezione fra π e <u>xy</u>.

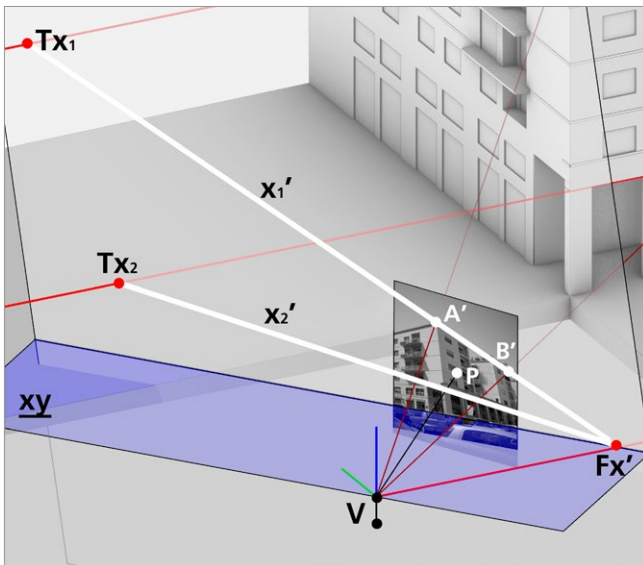
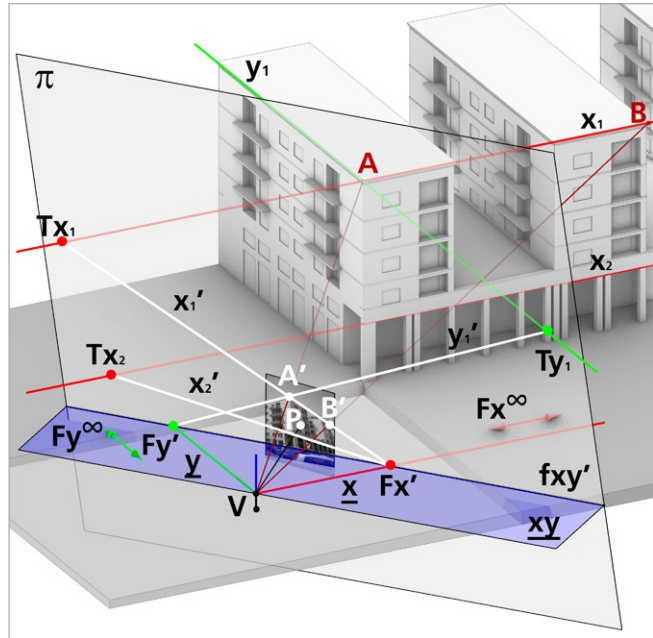
Fig. 35/ Rappresentazione prospettica di una retta y_1 dati il suo punto traccia e il punto di fuga. Si noti l'appartenenza di *Fx'* e *Fy'* a *fxy'*, retta di intersezione fra π e <u>xy</u>.

Consideriamo adesso una retta y_1 che passa per il punto *A* ed è parallela all'asse *y*. La sua proiezione prospettica passerà per il punto traccia Ty_1 e per il punto di fuga *Fy'*, che la retta condivide con tutte le rette che hanno la direzione dell'asse *y*.
Il punto di fuga *Fy'* sarà dato dall'intersezione con π della retta <u>y</u>, che passa per *V* ed è parallela all'asse *y*.

Fig. 36/ Rappresentazione prospettica di una retta y_1 dati il suo punto traccia e il punto di fuga. Si noti l'appartenenza di *Fx'* e *Fy'* a *fxy'*, retta di intersezione fra π e xy.

Anche il punto *Fy'*, come *Fx'*, appartiene alla retta di intersezione fra xy e π.
Possiamo dedurre che tutte le rette che proiettano direzioni parallele al piano *xy*, determineranno punti di fuga che appartengono a questa retta; poiché dunque questa retta contiene i punti di fuga di tutte le rette che appartengono o sono parallele al piano *xy*, essa assumerà la denominazione di 'retta di fuga' del piano *xy* e sarà indicata con il simbolo *fxy'* (fig. 36).
Come già anticipato, si è scelto in questa sede di adottare la simbologia ereditata dalla tradizione fin dove essa non diventi un ostacolo alla comprensione della generalità delle operazioni della prospettiva. Incontreremo dunque rette e piani non orizzontali e useremo i rispettivi punti di fuga e rette di fuga.
Possiamo dunque concludere affermando che la retta di fuga di un piano contiene i punti di fuga di tutte le rette che appartengono o sono parallele a quel piano.

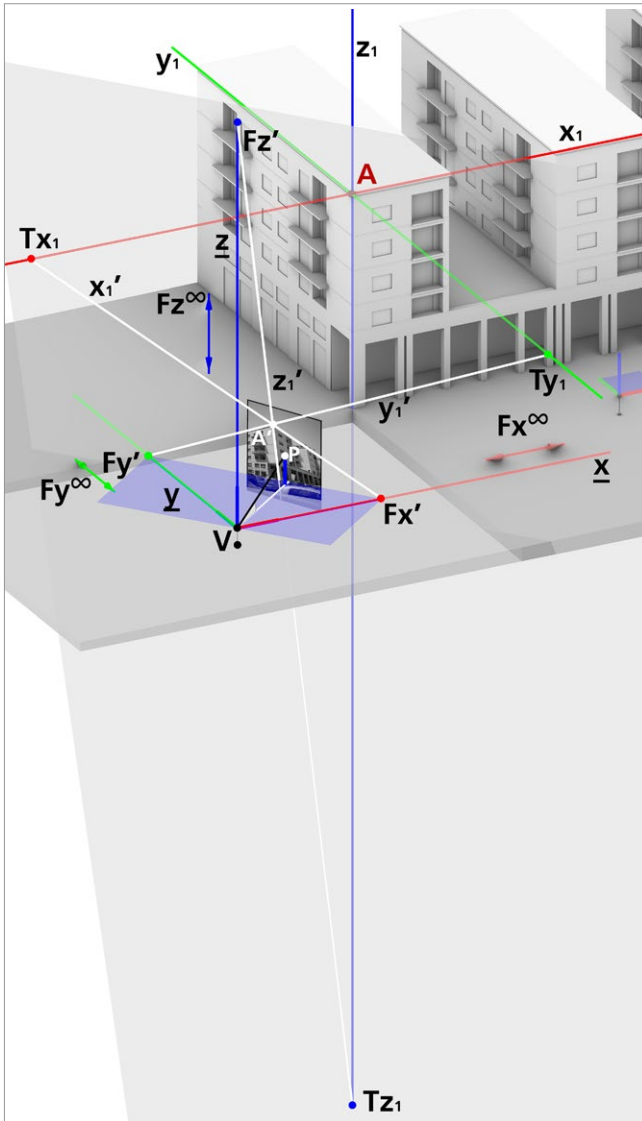



Fig. 37/ La retta z_1', proiezione di z_1, passa per Fz', per Tz_1 e per A'.

Dal punto di vista operativo possiamo altresì affermare che, dati due punti di fuga di rette che appartengono o sono parallele a un piano, la retta di fuga di quel piano passerà per tali punti.
Passiamo adesso alla descrizione della proiezione prospettica degli spigoli verticali degli edifici; si tratta com'è ovvio, di rette parallele all'asse *z* (fig. 37).

Benché la procedura non differisca da quelle finora illustrate, le dedicheremo qualche notazione aggiuntiva, poiché le rette parallele a *z*, ortogonali a *xy*, offrono l'opportunità di descrivere, più in generale, le caratteristiche proiettive di rette ortogonali a un piano. Iniziamo secondo il procedimento fin qui seguito, ossia conducendo per *V* una retta $\underline{z}$, parallela all'asse *z*, che interseca il quadro nel punto di fuga *Fz'*. Data una retta verticale z_1, la sua proiezione z_1' passerà per il suo punto traccia Tz_1 e per *Fz'*, il punto di fuga che z_1 condivide con le rette a essa parallele.
In gran parte delle prospettive costruite per via grafica si assume, come già accennato, che il quadro sia verticale; in questa ipotesi il punto di fuga delle rette verticali coincide con il loro punto improprio e le loro proiezioni prospettiche appaiono parallele tra loro e ortogonali alla *fxy'*.
Nelle immagini fotografiche, per contro, accade assai raramente che le rette verticali risultino parallele tra loro. Tale evenienza si verifica soltanto se l'angolo θ è nullo, ovvero se l'asse di presa è perfettamente orizzontale.
Nelle fotografie acquisite con camere standard questa condizione si riscontra molto raramente, perché, anche con l'ausilio di un treppiede, è molto difficile posizionare la camera in modo che l'asse di presa sia perfettamente orizzontale. Molte foto di architettura, in particolare quelle acquisite fino agli anni '60 dello scorso secolo, presentano linee verticali quasi perfettamente parallele, grazie all'utilizzo di camere da studio; a queste immagini è dedicato il quarto capitolo. Nelle fotografie acquisite con camere standard, le rette verticali convergono verso un punto proprio: se l'asse di presa è rivolto verso l'alto, come nella fotografia utilizzata finora, *Fz'* si troverà al di sopra della *fxy'*; se invece è inclinato verso il basso, come accade nelle immagini acquisite da velivoli o postazioni elevate, *Fz'* si troverà sotto la *fxy*.

Piani sezione retta del diedro

Come già anticipato, la rappresentazione della retta z_1, ortogonale al piano *xy*, offre l'occasione per introdurre un ente geometrico utile nelle operazioni di restituzione prospettica e, in generale, nella rappresentazione di rette ortogonali a un piano: il 'piano sezione retta del diedro'. Il termine 'diedro' indica la configurazione spaziale composta da due piani non paralleli tra loro; la retta di intersezione dei due piani prende il nome di 'costola' del diedro. Si dicono 'piani sezione retta del diedro' i piani che hanno giacitura ortogonale alla costola del diedro. Le rette di intersezione fra il piano sezione retta e i due piani che compongono il diedro sono dette 'rette di massima pendenza'.

Se consideriamo il diedro formato dal quadro π e dal piano <u>xy</u>, la cui costola è la retta di fuga *fxy'*, osserviamo che, nelle pagine che precedono, abbiamo già implicitamente introdotto un piano sezione retta: si tratta del piano individuato dal triangolo che ha vertici *V*, *P* e *H* (vedi fig. 30).

Abbiamo già osservato le proprietà di questo triangolo; basti qui ricordare che esso individua un piano ortogonale alla retta *fxy'*, e che al triangolo appartengono il segmento $\overline{PQ}$ ortogonale a <u>xy</u> e il cateto $\overline{VP}$ ortogonale a π. Possiamo quindi indicare una prima importante proprietà: *ai piani sezione retta, che indicheremo in questa sede con la lettera σ (sigma), appartengono rette ortogonali a entrambi i piani che formano il diedro*.

Il piano sezione retta individuato dal triangolo che ha vertici *V*, *P* e *H* sarà detto <u>σ</u> perché passa per *V* e, pertanto, la retta di massima pendenza che esso determina all'intersezione con π è anche *f*σ', retta di fuga dei piani sezione retta del diedro formato da <u>xy</u> e π (fig. 38). I punti di questa retta sono i punti di fuga delle rette che appartengono o sono parallele ai piani sezione retta σ.

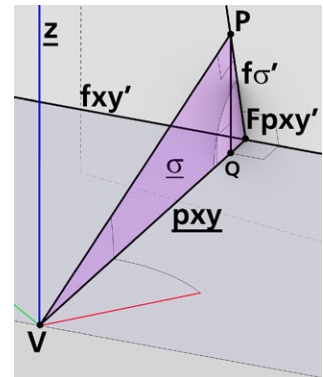



Fig. 38 Piano sezione retta del diedro formato da <u>xy</u> e da π.

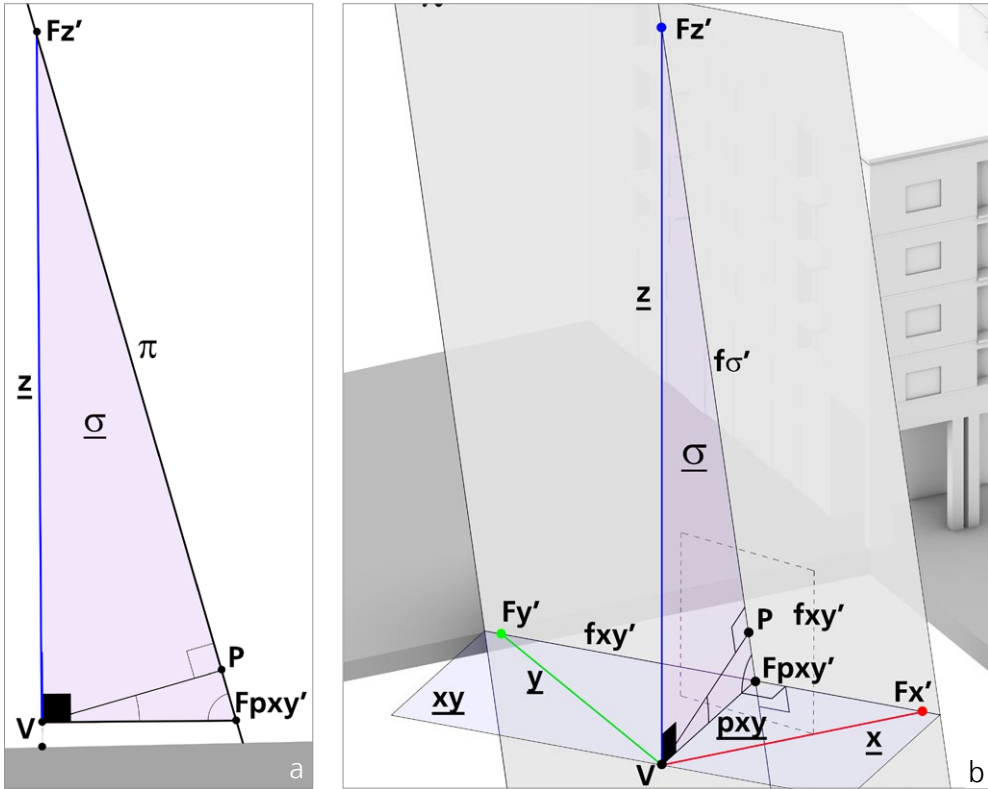



Fig. 39/ Schema prospettico della fotografia utilizzata come esempio. *a)* Vista frontale del piano σ. *b)* Vista assonometrica dello schema prospettico con la rappresentazione del piano σ.

La retta di intersezione fra σ e π, retta di massima pendenza di *xy*, coincide con l'ipotenusa del triangolo. Poiché anche questa retta passa per *V*, essa assume la denominazione *pxy*; il suo punto di intersezione con π sarà *Fpxy'*, punto di fuga delle rette di massima pendenza dei piani orizzontali, nel diedro che essi compongono con π (fig. 39).

Al termine di questa descrizione osserviamo le seguenti proprietà: a) dato un piano *xy* non parallelo a π, la costola del diedro formato dai due piani è la retta di fuga *fxy'*,cui appartengono i punti di fuga delle rette parallele al piano, come *Fx'* e *Fy'*; b) σ è il piano sezione retta del diedro che passa per *V*; esso interseca π in *f*σ*'* e *xy* in *pxy*; c) *f*σ*'* passa per il punto principale *P* ed è ortogonale a *fxy'*; d) il punto di intersezione fra *f*σ*'* e *fxy'* è *Fpxy'*, punto di fuga

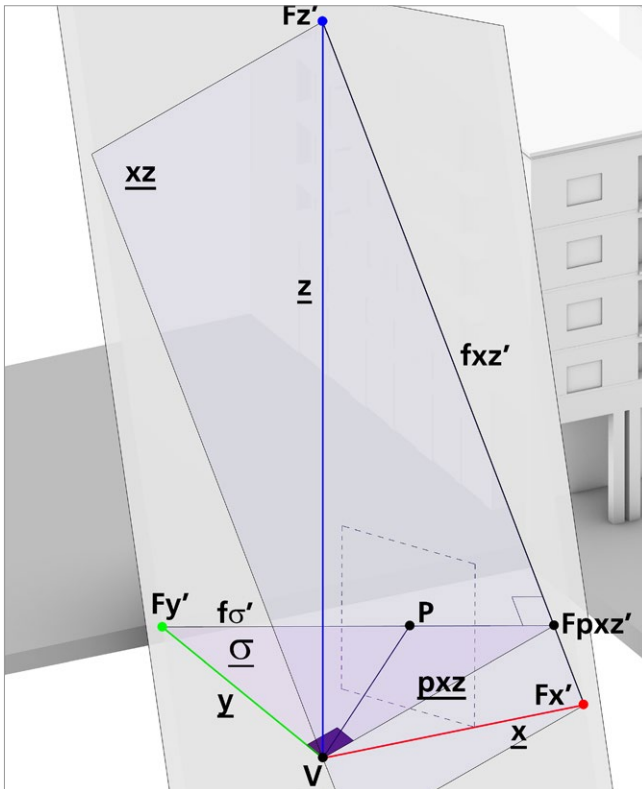



Fig. 40/ Piano sezione retta del diedro formato dai piani <u>xz</u> e π. Vista assonometrica.

delle rette di massima pendenza dei piani *xy*; e) la retta <u>*z*</u> ortogonale a <u>*xy*</u>, appartiene a <u>σ</u> e, pertanto *Fz'* appartiene alla *f*σ*'*; f) le rette <u>*z*</u> e <u>*pxy*</u> sono ortogonali fra loro.

Se consideriamo il diedro formato da π e dal piano <u>*xz*</u> (fig. 40), parallelo ai fronti degli edifici, osserviamo: a) la costola del diedro è *fxz'*, retta di fuga cui appartengono *Fx*' e *Fz*'; b) <u>σ</u> interseca π in *f*σ*'* e <u>*xz*</u> in <u>*pxz*</u>; c) *f*σ*'* passa per il punto principale *P* ed è ortogonale a *fxz'*; d) il punto di intersezione fra *f*σ*'* e *fxz'* è *Fpxz'*, punto di fuga delle rette di massima pendenza dei piani *xz*; e) la retta <u>*y*</u>, ortogonale a <u>*xz*</u>, appartiene a <u>σ</u> e, pertanto *Fy'* appartiene alla *f*σ*'*; f) le rette <u>*y*</u> e <u>*pxz*</u> sono ortogonali fra loro.

Le relazioni fra gli enti geometrici, così enunciate, sono valide per qualsiasi piano.

Ribaltamenti

Prima di passare alla descrizione del procedimento di restituzione occorre mostrare in che modo le relazioni spaziali che strutturano lo schema prospettico possono essere riportate sul quadro π.

La restituzione prospettica condotta con costruzioni grafiche[21] sarà sviluppata sul piano dell'immagine (sul quadro π), per poi spostarsi nello spazio.

Abbiamo già fatto cenno a studi che hanno mostrato la possibilità di ricostruire l'orientamento interno ed esterno di un'immagine fotografica con strumenti di modellazione.

In questo testo, però, il procedimento di ricostruzione dell'orientamento interno sarà (quasi) sempre condotto sul piano dell'immagine.

Occorre, a tal fine, produrre sul quadro un'immagine degli enti geometrici esterni a esso, come V, x, y e z, che mantenga invariate le loro relazioni di posizione.

Questo risultato è raggiungibile attraverso l'operazione di ribaltamento, che permette di trasferire sul quadro una figura piana, mantenendone invariata la forma e la grandezza.

La proprietà dell'operazione di ribaltamento può essere così enunciata: *dato un diedro formato da due piani e la relativa costola, se una figura che appartiene a uno dei due piani viene ribaltata sull'altro, i punti della figura descrivono, ribaltandosi, archi di circonferenza che appartengono a piani sezione retta del diedro*.

I centri degli archi di circonferenza saranno i punti di intersezione fra i piani sezione retta e la costola del diedro, che assume il ruolo di 'cerniera' del ribaltamento.

Iniziamo ribaltando il punto V su π; come appena detto, l'operazione di ribaltamento presuppone l'esistenza di un diedro; pertanto, non basta affermare di voler ribaltare V sul quadro, ma occorre introdur-

21 Abbiamo già fatto cenno, nel primo capitolo, alla possibilità di risalire all'orientamento dell'immagine con strumenti di modellazione.

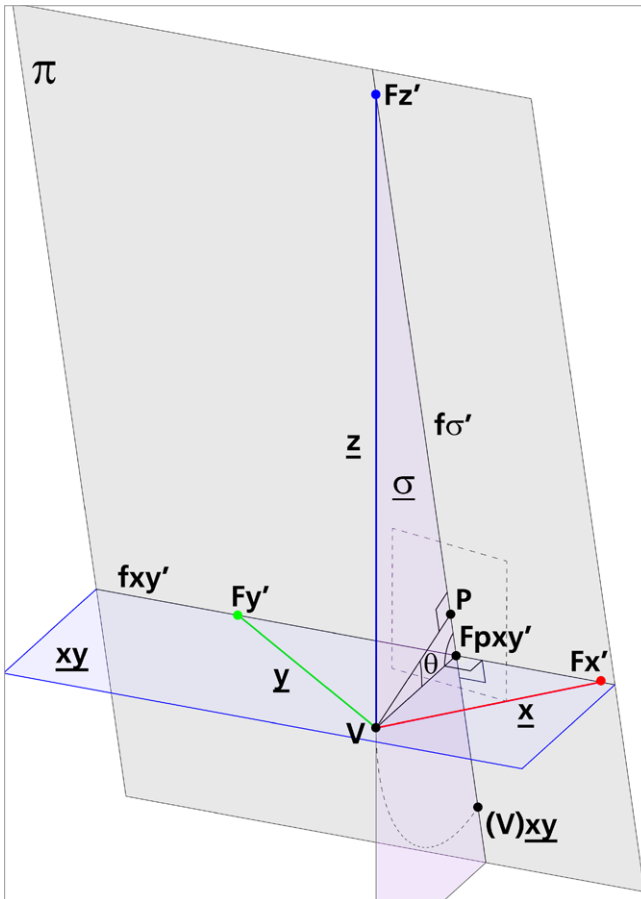



Fig. 41/ Ribaltamento di *V* su π secondo il piano xy.

re un piano che contiene *V* e che forma con π un diedro. Se dunque intendiamo ribaltare il punto *V* su π utilizzando il piano *xy*, dovremo considerare il diedro formato da *xy* e π.
Dalla proprietà dell'operazione di ribaltamento deduciamo che il punto *V* descriverà un arco di circonferenza che appartiene a σ e ha centro in *Fpxy'*.
Il raggio della circonferenza è dato dal segmento $\overline{VFpxy'}$ (fig. 41).
L'arco di circonferenza intersecherà π in un punto della retta fσ', che appartiene a σ e a π; il punto sarà indicato dal simbolo *(V)xy*, che leggiamo '*V* ribaltato secondo il piano *xy*.

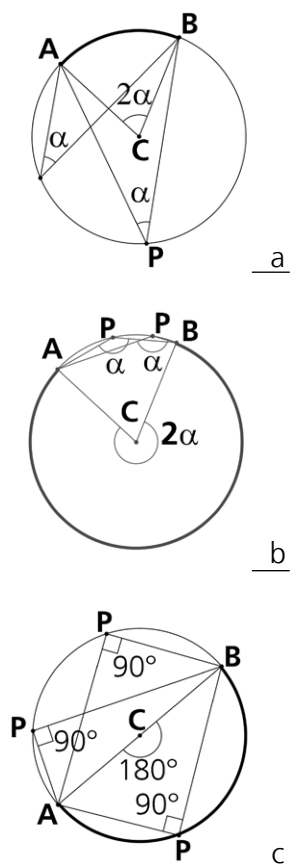
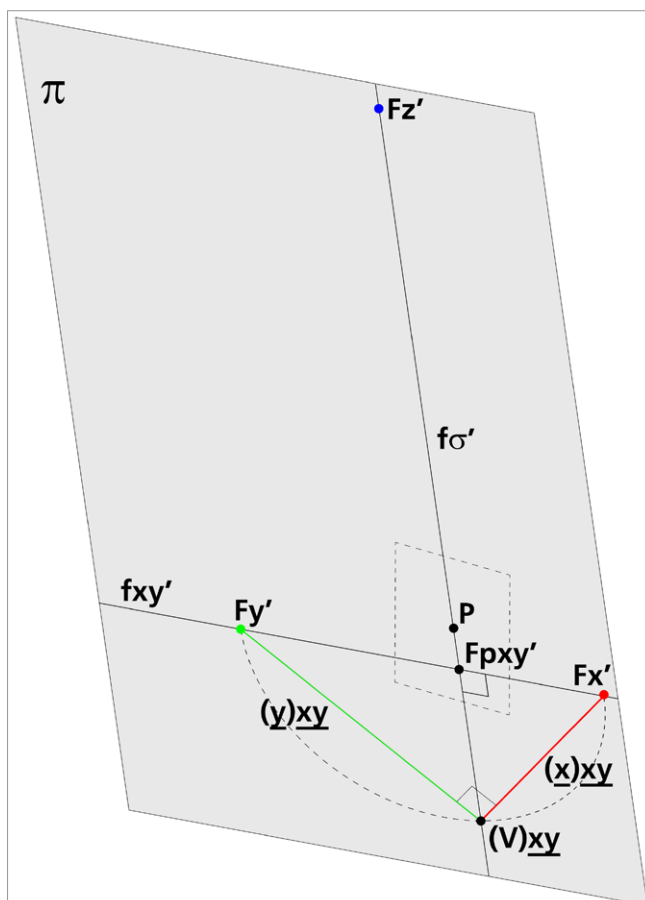



Fig. 42/ L'inscrivibilità di un triangolo rettangolo in una semicirconferenza deriva dalle relazioni che legano angoli al centro e angoli alla circonferenza: *In un cerchio, l'angolo al centro è il doppio dell'angolo alla circonferenza quando essi abbiano lo stesso arco come base* (Euclide, Elementi, Libro III: Proposizione 20). *a)* Se l'arco di circonferenza ha lunghezza minore della semicirconferenza, 2α sarà minore dell'angolo piatto e α sarà un angolo acuto. *b)* Se l'arco di circonferenza ha lunghezza maggiore della semicirconferenza, 2α sarà maggiore dell'angolo piatto e α sarà un angolo ottuso. *c)* Se l'arco di circonferenza ha lunghezza pari alla semicirconferenza, 2α sarà un angolo piatto e α sarà un angolo retto.

Fig. 43/ Vista assonometrica del quadro con il ribaltamento di *V* secondo il piano *xy*.

Osserviamo che il triangolo che ha vertici *V*, *Fx'* e *Fy'*, è un triangolo rettangolo; in virtù delle proprietà che legano, nel cerchio, angoli al centro e angoli alla circonferenza (fig. 42), possiamo affermare che il punto *V* apparterrà alla semicirconferenza di diametro $\overline{Fx'Fy'}$.
Noti questi due punti, potremo disegnare sul quadro π la semicirconferenza che ha centro nel punto medio del segmento $\overline{Fx'Fy'}$; essa intersecherà la retta di fuga fσ' nel punto *(V)xy* (fig. 43).
Il ribaltamento del punto *V* permette di rappresentare il ribaltamento delle rette *x* e *y*; non sarà necessario ribaltare altri punti delle rette, poiché i rispettivi

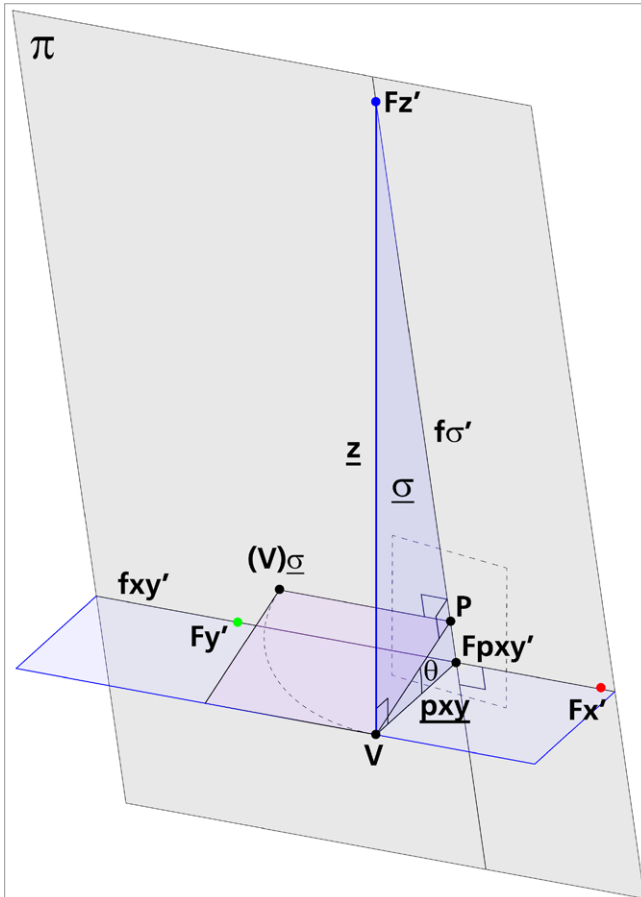
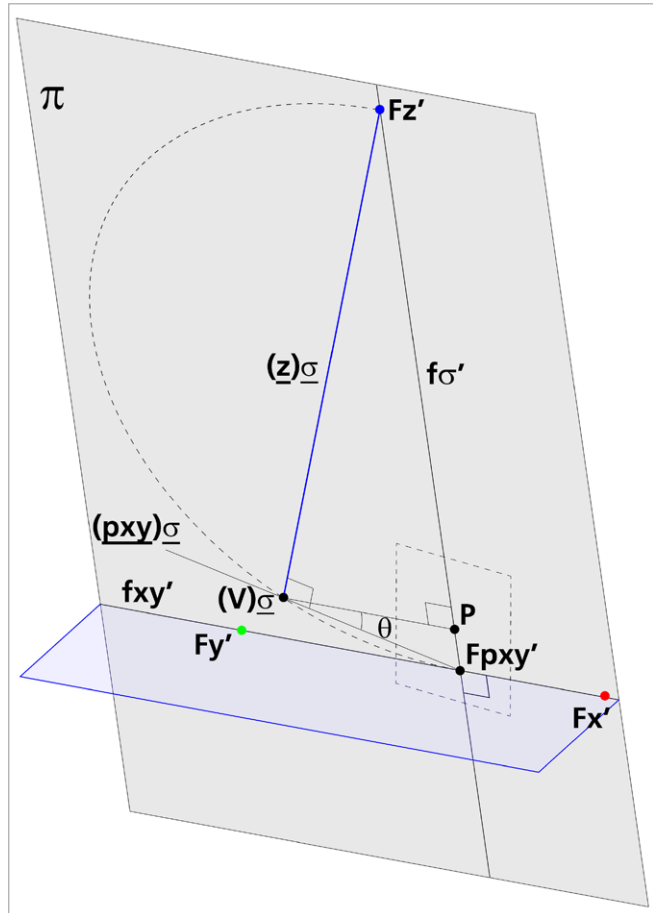



Fig. 44/ Ribaltamento di V su π secondo il piano σ.

punti di fuga *Fx'* e *Fy'* appartengono già a π e non mutano posizione a seguito del ribaltamento.
La retta *(x)xy* passerà dunque per *(V)xy* e per *Fx'*, mentre la retta *(y)xy* passerà per *(V)xy* e per *Fy'*.
Andiamo adesso a eseguire un nuovo ribaltamento del punto *V* su π.
Questa volta il piano che utilizzeremo per eseguire il ribaltamento sarà il piano σ. La cerniera del ribaltamento sarà la fσ', costola del diedro formato da σ e da π (fig. 44).
L'arco di circonferenza che il punto *V* descriverà in questo nuovo ribaltamento appartiene a un piano ortogonale alla fσ'.

Fig. 45/ Ribaltamento di *V* su π secondo il piano σ̲.

In virtù delle proprietà precedentemente richiamate, il piano sezione retta contiene il segmento $\overline{VP}$, ortogonale a π, e interseca π in una retta ortogonale alla fσ', alla quale apparterrà il punto *(V)*σ̲. Anche in questo caso le proprietà della circonferenza possono facilitare la determinazione sul quadro di *(V)*σ̲. Sappiamo infatti che le rette z̲ e p̲x̲y̲, che appartengono a σ̲, sono ortogonali tra loro[22], e che le due rette ribaltate su π rimarranno ortogonali. In modo analogo a quanto osservato poc'anzi, le due rette ribaltate passeranno per *(V)*σ̲ e per i rispettivi punti di fuga *Fz'* e *Fpxy'*, che conservano la propria posizione perché appartengono già a π (fig. 45).

22 Osserviamo già adesso che, anche se le direzioni di rette formano un angolo diverso dall'angolo retto, è sempre possibile ricorrere alle proprietà che legano angoli al centro e alla circonferenza per determinare il ribaltamento di *V* sul quadro.

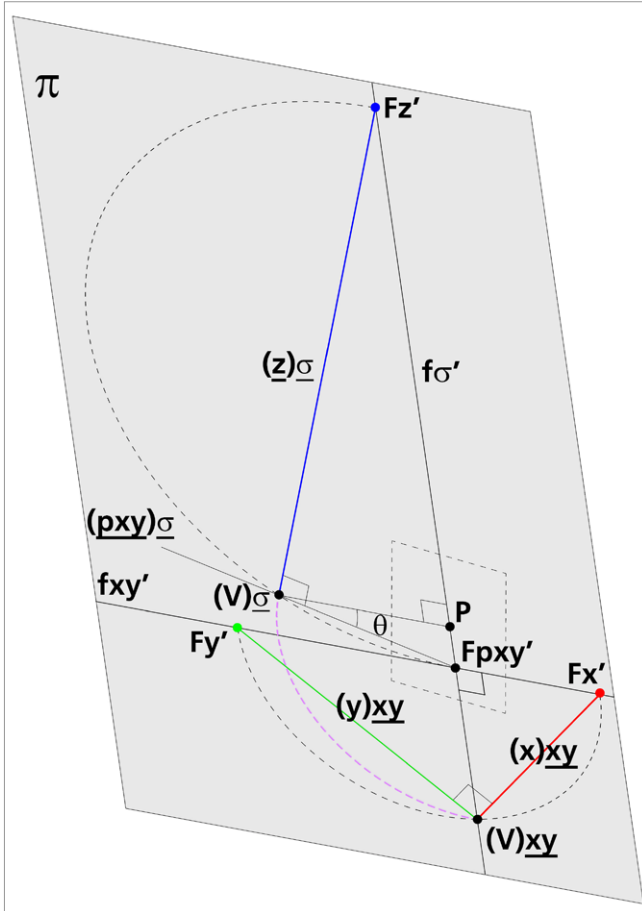
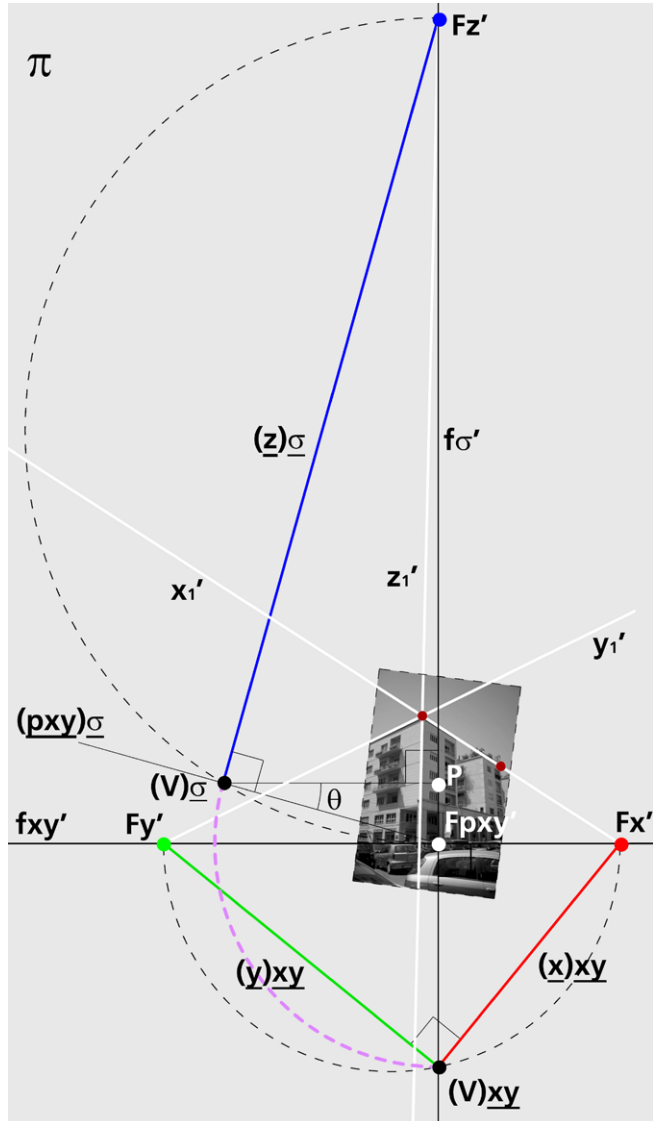



Fig. 46/ Invarianza della distanza fra i punti V e Fpxy' nei due ribaltamenti.

Sul quadro π, noti i due punti di fuga, basterà dunque tracciare la semicirconferenza di diametro $\overline{Fz'Fpxy'}$. La retta che passa per *P* ed è ortogonale alla *f*σ*'* intersecherà la semicirconferenza in *(V)*σ; questa retta è il ribaltamento su π dell'asse di presa $\overline{VP}$. L'angolo formato in *(V)*σ dal ribaltamento dell'asse di presa e dalla *(pxy)*σ è l'angolo θ, che misura la pendenza dell'asse di presa. Il segmento definito dai punti *(V)*σ e *Fpxy'* mantiene invariata la propria lunghezza in entrambi i ribaltamenti fin qui descritti. Nel ribaltamento secondo *xy*, i suoi estremi sono i punti *(V)xy* e *Fpxy'*; nel ribaltamento secondo σ, i suoi estremi sono i punti *(V)*σ e *Fpxy'* (fig. 46).

Fig. 47/ Ribaltamento su π di *V* e delle rette x, y e z secondo i piani xy e σ.

Se dunque, con centro in *Fpxy'*, si traccia un arco di circonferenza che passa per uno dei due punti ribaltati, esso passerà anche per l'altro (fig. 47).
Le considerazioni fin qui esposte si traducono sul piano del quadro in alcune semplici costruzioni grafiche, che permettono di determinare l'orientamento interno e la direzione dell'asse di presa di un'im-

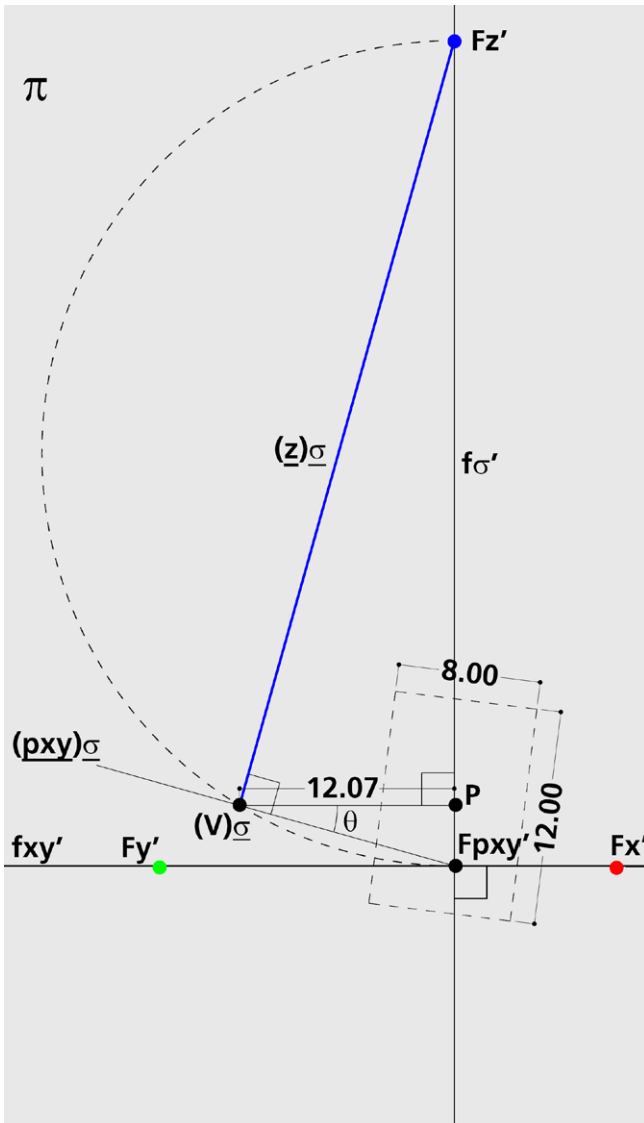



Fig. 48/ Misura della lunghezza focale sul ribaltamento dell'asse di presa.

magine fotografica, a partire dalla conoscenza dei punti di fuga di rette raffigurate nell'immagine.
Il procedimento illustrato è stato applicato al piano xy e alla retta z, ortogonale a esso. Nulla sarebbe mutato, sul piano delle relazioni e delle costruzioni grafiche, se il procedimento fosse stato applicato al piano xz e alla retta y, ortogonale a esso.

Un'ultima osservazione riguarda la distanza fra i punti *(V)*$\underline{\sigma}$ e *P* che equivale, come già osservato, alla distanza focale dell'obiettivo.
La distanza che risulta dal procedimento, pari a 12,07 m, va ovviamente commisurata al fattore di ingrandimento che abbiamo assegnato all'immagine per poter operare su di essa. Nel caso in esame l'immagine è stata ingrandita di un fattore pari a $333,\overline{3}$; le dimensioni originali, pari a 24 x 36 mm sono dunque divenute 8 x 12 m.
La lunghezza focale reale, che risulta dalla divisione 12,07 / $333,\overline{3}$ = 0,0362 m, corrisponde, come atteso, alla lunghezza focale calcolata dal software di fotogrammetria, pari a 36,2 mm (fig. 48).

3
Restituzione da immagini riprese con camere standard

Per illustrare il processo di restituzione utilizzeremo l'immagine del capitolo precedente, della quale conosciamo i parametri di orientamento interno ed esterno.
Al termine del processo di restituzione potremo pertanto verificare lo scarto fra i dati estratti con le costruzioni grafiche della restituzione prospettica e i dati corrispondenti prodotti dalle procedure fotogrammetriche SfM.
Prima di procedere occorre ribadire, ancora una volta, che la procedura che illustreremo non intende in alcun modo proporsi come strumento per il rilievo dell'esistente. L'excursus storico tracciato nel primo capitolo ha messo in evidenza il duplice ruolo che già Deneux, nel 1930, assegnava alla restituzione prospettica da fotografia: i) strumento per il rilievo, in particolare degli alzati; ii) strumento per la ricostruzione di edifici danneggiati durante la Prima guerra mondiale.

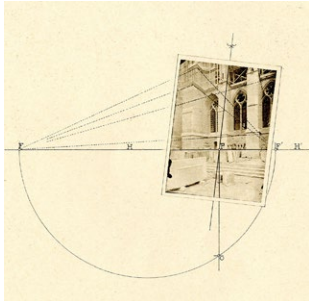



Fig. 1/ Rotazione del rettangolo che delimita l'immagine rispetto alla linea d'orizzonte. Deneux H., 1930, *Planche* XX.

Benché gli strumenti di rappresentazione digitale abbiano sensibilmente migliorato l'accuratezza del processo di restituzione, i margini di approssimazione nella restituzione di una fotografia di architettura possono essere stimati in un range compreso fra 5 e 50 cm, in base alla dimensione e alla risoluzione dell'immagine fotografica.
Risulta evidente che la restituzione prospettica è ben distante dall'accuratezza e dall'attendibilità offerte delle moderne metodologie hardware e software del rilievo digitale: laser scanner e fotogrammetria SfM.
La scelta di iniziare con la foto di uno scenario esistente, anziché con l'immagine di un edificio non più esistente, non deve distrarre il lettore dall'unica ragionevole finalità della restituzione prospettica digitale: la ricostruzione, da foto d'epoca, di edifici non più esistenti o profondamente alterati.
Il primo passaggio del procedimento di restituzione prospettica 'digitale' consiste nell'inserire, nell'ambiente virtuale di lavoro, l'immagine fotografica. Di solito le dimensioni dell'immagine originale non sono note e pertanto si assegna un fattore di grandezza arbitrario.
Nel caso dell'immagine scelta come banco di prova, registrata da un sensore di dimensioni 24 x 36 mm, riproporremo il medesimo fattore di ingrandimento fin qui usato, pari a $333,\overline{3}$. L'immagine inserita avrà dunque dimensioni 8 x 12 m.
I primi passaggi saranno dedicati all'individuazione di rette che permettono la ricostruzione della retta di fuga di un piano e del punto di fuga delle rette a esso ortogonali; il soggetto della foto permette di ritrovare la retta di fuga dei piani orizzontali e il punto di fuga delle rette verticali.
Iniziamo dunque dal tracciamento della retta di fuga *fxy*', che passerà per i punti di fuga *Fx'* e *Fy'*, trovati all'intersezione dei prolungamenti delle proiezioni di

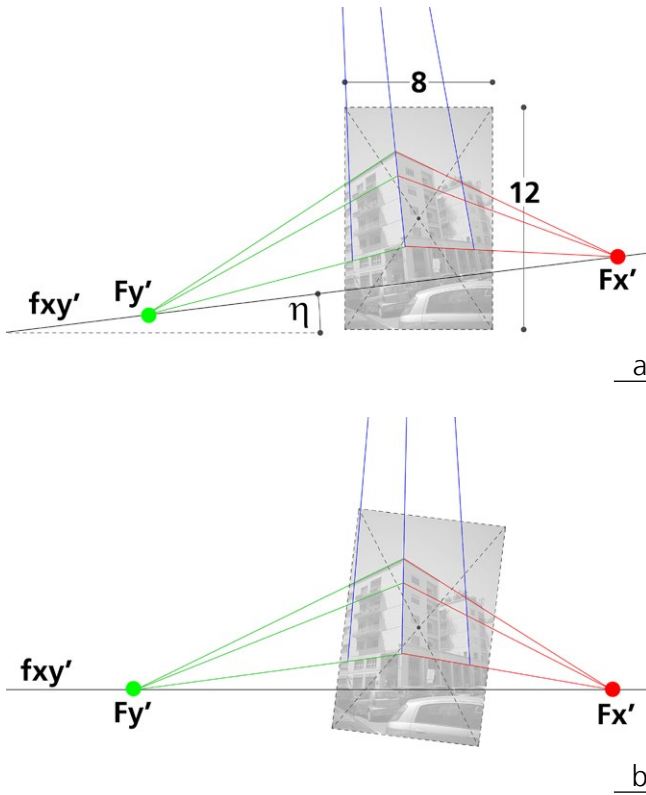
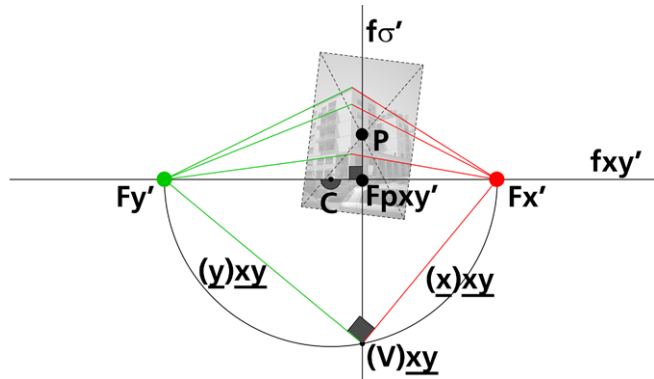



Fig. 2/ *a)* Identificazione dei punti di fuga di due rette orizzontali e della retta di fuga *fxy*'. Misura dell'angolo η. *b)* Rotazione dello schema prospettico che conferisce direzione orizzontale alla *fxy'*.

rette parallele individuate sull'immagine; per mantenere la congruenza con il modello che descrive lo scenario reale, il punto di fuga delle rette parallele ai lati lunghi della corte è stato chiamato *Fx'*.
Osserviamo che la retta *fxy'* non è parallela ai lati dell'immagine (fig. 1); nel capitolo precedente abbiamo già osservato che, affinché ciò accada, occorrerebbe che fosse nullo η, l'angolo di rotazione della camera intorno all'asse di presa; abbiamo descritto in quali condizioni quest'angolo si annulla ed altresì notato la difficoltà di imporre sul campo le condizioni necessarie all'azzeramento dell'angolo.
Il primo passaggio del procedimento di restituzione per via grafica dell'orientamento interno consisterà dunque nell'imporre una rotazione che assegni direzione orizzontale alla *fxy'* (fig. 2).

Fig. 3/ Ribaltamento di *V* sul quadro secondo il piano orizzontale individuato da due rette di cui sono noti i punti di fuga e l'angolo di incidenza.

Orientamento interno con punto principale noto

Se la fotografia è disponibile nel suo pieno formato, ossia non ha subito ritagli né deformazioni, e se è stata acquisita con una camera standard, possiamo rintracciare il punto principale *P* all'intersezione delle diagonali del rettangolo che delimita l'immagine. In queste condizioni, la conoscenza di due punti di fuga di rette complanari e dell'angolo che esse formano, basterà a determinare la distanza focale e completare così l'orientamento interno. Se le rette complanari appartengono, come in questo caso, al piano *xy*, non sarà necessario conoscere *Fz'*, punto di fuga delle rette verticali, ortogonali al piano *xy*.
Dati *Fx'*, *Fy'* e *fxy'*, si procede come segue (fig. 3):
a) per il punto *P* si traccia la retta *fσ'*, ortogonale a *fxy'*, e si segna il punto di intersezione *Fpxy'*; b) si traccia la semicirconferenza di diametro $\overline{Fx'Fy'}$, cui apparterrà *(V)xy*, in virtù della condizione di ortogonalità di *x* e *y*; c) si prolunga la *fσ'* fino a intersecare la semicirconferenza nel punto *(V)xy*; d) si tracciano le rette *(x)xy* e *(y)xy*; e) si traccia per *P* una retta ortogonale a *fσ'*, che corrisponde, come già osservato, al ribaltamento secondo σ dell'asse di presa; f) si traccia un arco di circonferenza, di centro *Fpxy'*, che passa per *(V)xy*; l'intersezione con la retta ortogonale a *fσ'* che passa per *P* sarà *(V)σ*; g) la retta che

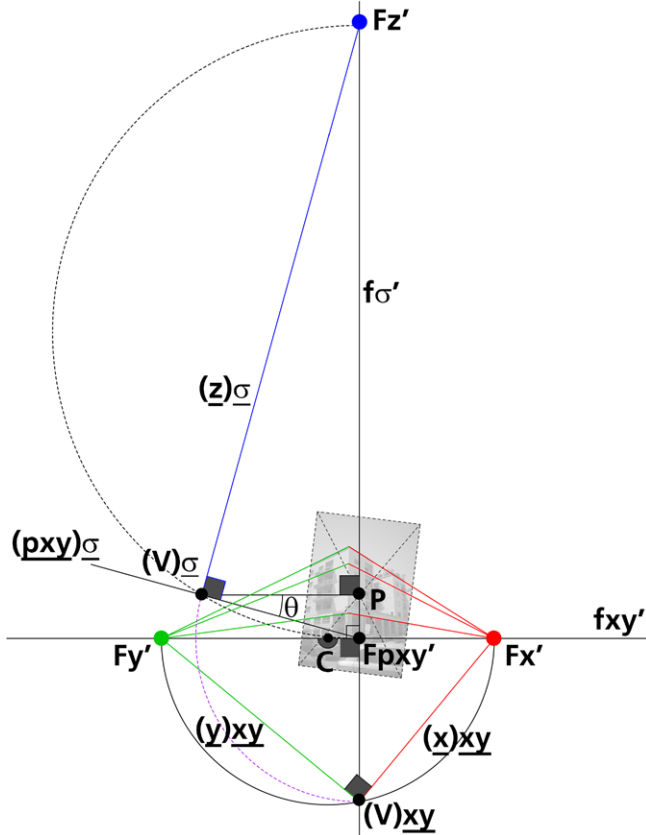
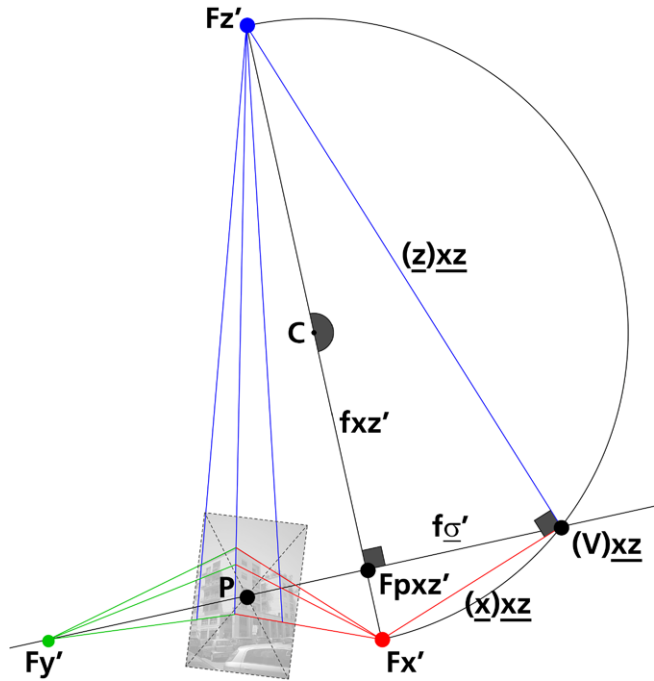
Fig. 4/ Ribaltamento di *V* secondo il piano sezione retta σ; misura della distanza focale e dell'inclinazione dell'asse di presa rispetto al piano orizzontale.

passa per *(V)*σ e per *Fpxy’* sarà *(pxy)*σ, ribaltamento secondo σ della retta di massima pendenza di *xy*; h) la retta ortogonale a *(pxy)*σ che passa per *(V)*σ sarà *(z)*σ; questa retta intersecherà la *f*σ*’* nel punto *Fz’*. Il triangolo che ha vertici nei punti *Fpxy*', *(V)*σ e *Fz*', retto in *(V)*σ, sarà inscritto in una semicirconferenza di diametro $\overline{Fpxy'Fz'}$. Occorrerà ovviamente verificare che le rette che fugano in *Fz*' corrispondano, nella fotografia, alle immagini di rette verticali (fig. 4).
Richiamiamo due osservazioni fatte in precedenza: a) la lunghezza del segmento definito dai punti *(V)*σ e *P*, rapportata alla dimensione dell'immagine, corrisponde alla lunghezza focale dell'obiettivo; b) l'angolo formato dalla retta *(pxy)*σ e dal ribaltamento

Fig. 5/ Restituzione dell'orientamento interno: Ribaltamento di *V* sul quadro secondo il piano verticale individuato da due rette di cui sono noti i punti di fuga e l'angolo di incidenza.

dell'asse di presa, individuato dal segmento definito dai punti *(V)*σ e *P*, e è l'angolo θ, che misura l'inclinazione dell'asse di presa rispetto al piano orizzontale.

Se i punti di fuga noti non sono quelli di due direzioni di rette orizzontali, ma di una direzione orizzontale e di una verticale, come accade spesso nelle foto di architettura, e se sono noti i punti di fuga di rette che si intersecano, ancora una volta, ad angolo retto, come ad esempio *Fx*' e *Fz*', la procedura inizierà con il tracciamento della *fxz*' e seguirà gli stessi passaggi (fig. 5): a) per il punto *P* si traccia la retta *f*σ', ortogonale a *fxz'*, e si segna il punto di intersezione *Fpxz'*, punto di fuga delle rette di massima pendenza del piano *xz* nel diedro che esso forma con π; b) nota l'ortogonalità tra *x* e *z*, si traccia la semicirconferenza di diametro $\overline{Fx'Fz'}$; c) si prolunga *f*σ' fino a intersecare la semicirconferenza in *(V)xz*; d) si

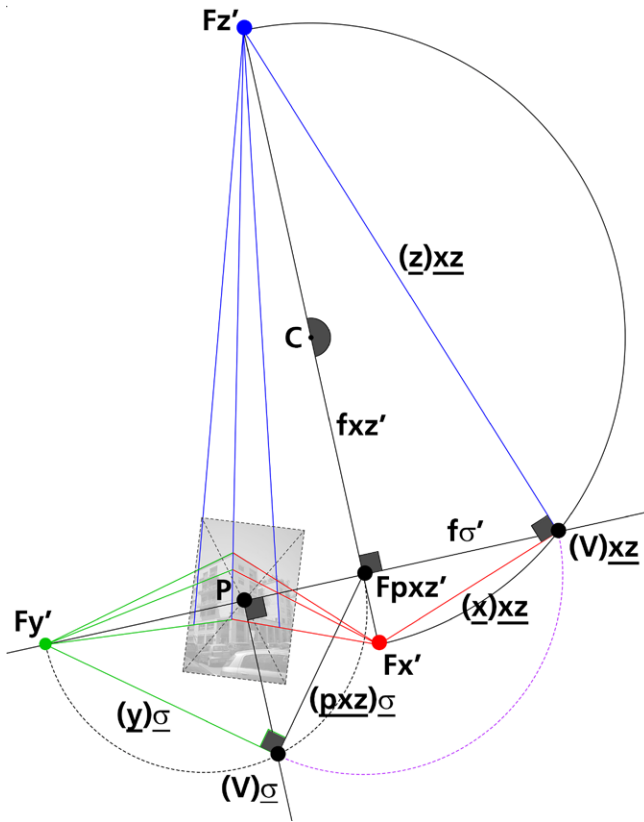
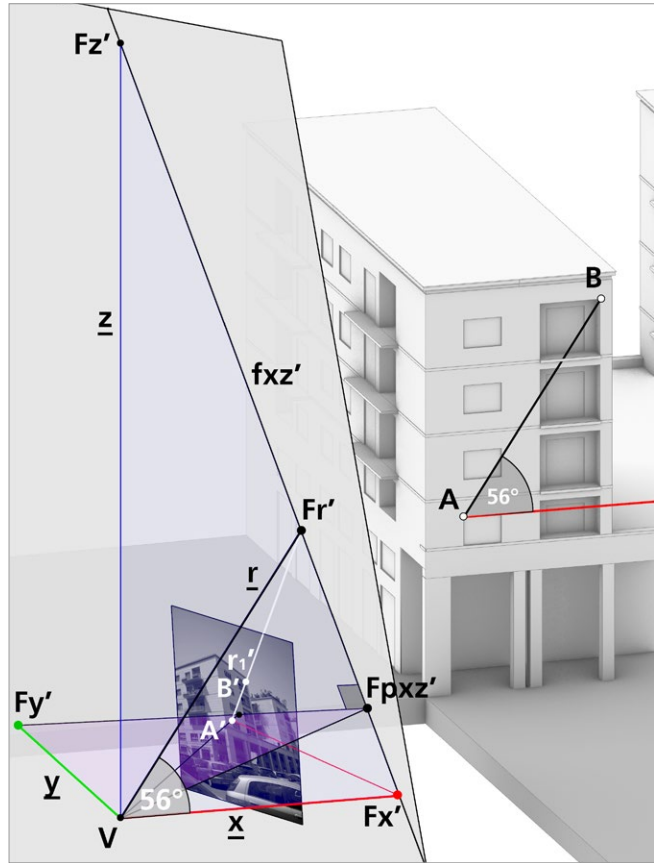
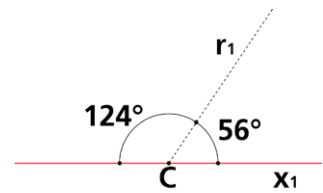
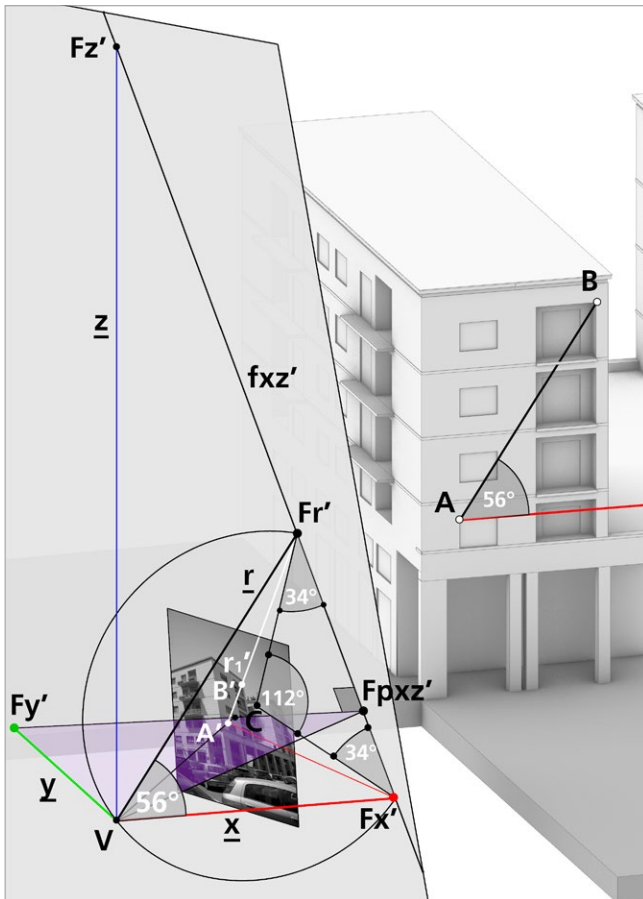
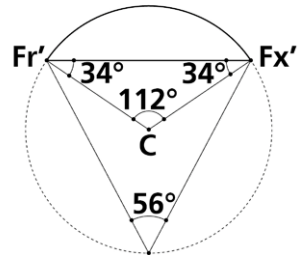
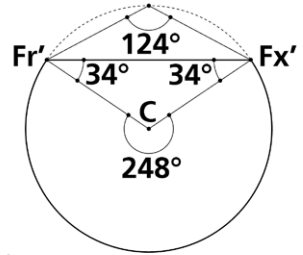



Fig. 6/ Restituzione dell'orientamento interno: Ribaltamento di *V* secondo il piano sezione retta e misura della lunghezza focale.

tracciano le rette *x* e *z*; e) si traccia per *P* (fig. 6) una retta ortogonale a *fσ'*, ossia il ribaltamento dell'asse di presa; f) si traccia un arco di circonferenza, di centro *Fpxz'*, che passa per *(V)xz*; l'intersezione tra questo arco di circonferenza e l'asse di presa ribaltato, che passa per *P* ed è ortogonale a *fσ'*, sarà *(V)σ*; g) la retta che passa per *(V)σ* e per *Fpxz'* sarà *(pxz)σ*, ribaltamento della retta di massima pendenza di *xz*; h) la retta *(y)σ*, che passa per *(V)σ* ed è ortogonale a *(pxz)σ*, intersecherà la *fσ'* nel punto *Fy'*; h) il triangolo che ha vertici nei punti *Fpxz*', *(V)σ* e *Fy*', retto in *(V)σ*, sarà inscritto in una semicirconferenza di diametro $\overline{Fpxz'Fy'}$. Anche in questo caso andrà verificata la corrispondenza delle rette che fugano in *Fy*' con la loro immagine fotografica.

Fig. 7/ Retta r_1 passante per i punti *A* e *B* di una facciata rivolta verso la corte, parallela al piano *xz*.

Fig. 8/ Misura dell'angolo di incidenza formato dalla retta r_1 e da una retta parallela all'asse *x*. Determinazione del punto di fuga *Fr*'.

Accade spesso, nella restituzione prospettica, che le rette delle quali è possibile conoscere l'angolo di incidenza non si intersechino ad angolo retto, bensì formando angoli acuti o ottusi e i corrispondenti angoli supplementari.
In questa eventualità, è ancora possibile determinare la lunghezza focale facendo, ancora una volta, riferimento alle relazioni tra angoli al centro e angoli alla circonferenza.
Prendiamo, ad esempio, due rette che appartengono al fronte degli edifici sulla corte aperta, che ha giacitura *xz* nel sistema di riferimento adottato.
La prima retta è parallela all'asse *x*; la seconda retta, r_1, passa per gli spigoli *A* e *B* di due aperture (fig. 7);

l'angolo di incidenza tra le due rette, misurato sul modello costruito in precedenza, è pari, con approssimazione all'unità, a 56°.

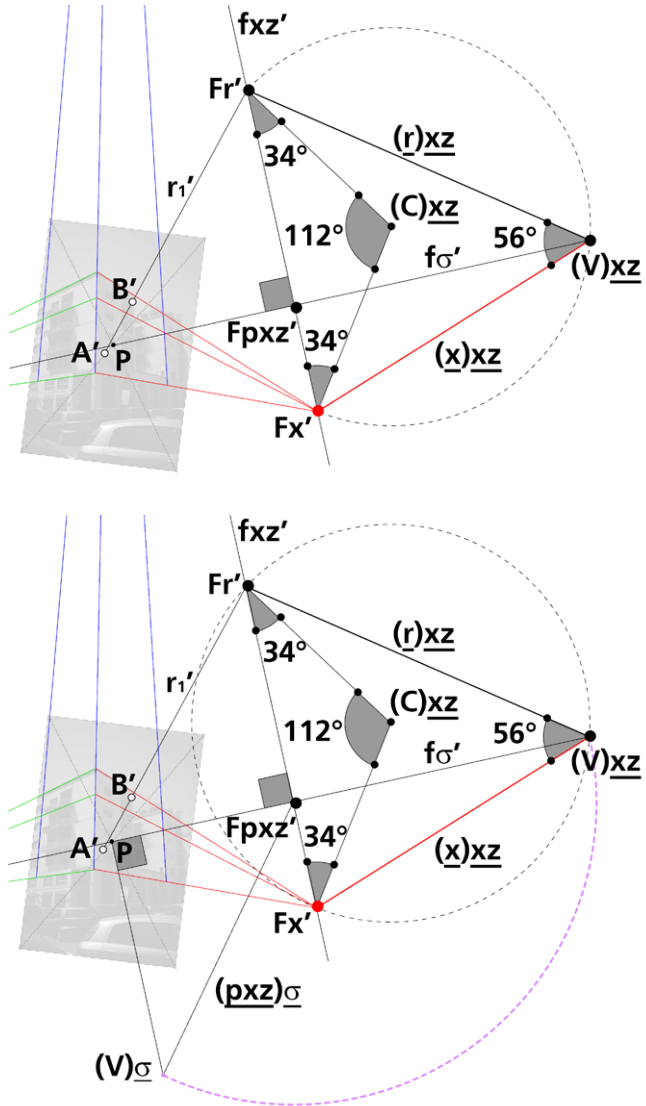
La proiezione r_1*'* passerà per il punto di fuga *Fr'*, che si trova sulla *fxz'* all'intersezione con $\underline{r}$, retta proiettante parallela a r_1. Le rette $\underline{r}$ e $\underline{x}$ si intersecano in *V* e sottendono un angolo di 56° (fig. 8). Osserviamo adesso la circonferenza che passa per i tre punti non allineati *Fr'*, *Fx'* e *V*.

L'angolo in *V* sarà un angolo alla circonferenza e, detto *C* il centro della circonferenza, i raggi che passano per *Fr'* e *Fx'* devono sottendere un angolo pari a 2 x 56° = 112° (figg. 9-10).

Fig. 9/ Determinazione del centro *C* della circonferenza che passa per i punti *Fr'*, *Fx'* e *V*. Il segmento $\overline{Fr'Fx'}$ è la corda su cui vengono misurati simmetricamente gli angoli di 34°.

Fig. 10/ *a)* L'angolo di incidenza fra la retta r_1 e la retta parallela all'asse *x* può essere letto in due modi: 56° e il suo supplementare 124°. *b)* Nella circonferenza di centro *C* i due angoli sottendono la medesima corda $\overline{Fr'Fx'}$. Cambia solo lettura dell'arco di circonferenza, che nel primo caso va da *Fr'* a *Fx'* in senso orario. *c)* Nel secondo va da *Fr'* a *Fx'* in senso antiorario. In entrambi i casi l'angolo di 34°, applicato simmetricamente agli estremi del corda, determina il centro *C*.

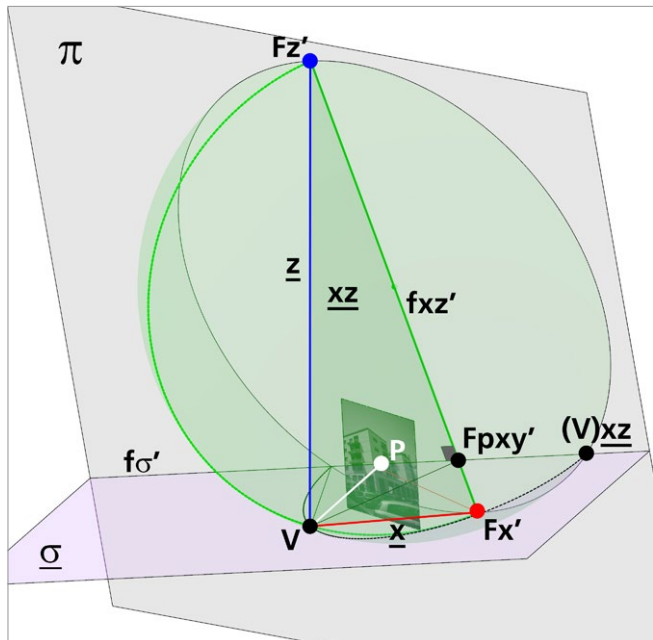
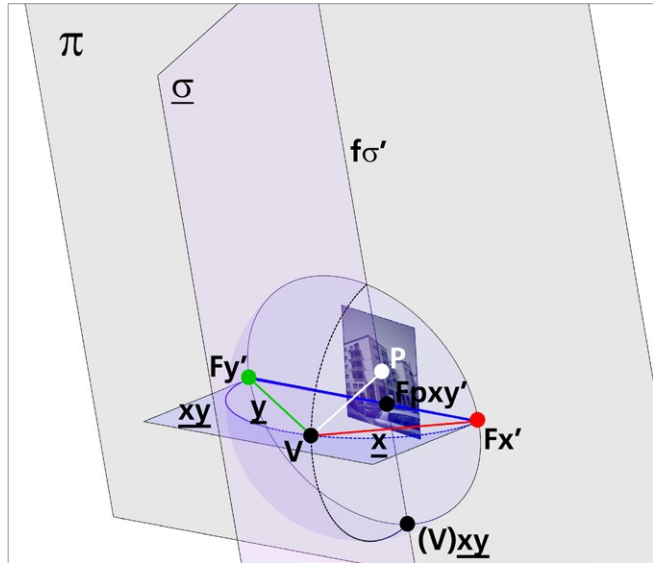
Fig. 11/ Determinazione di *(V)σ*.

Fig. 12/ Determinazione della distanza focale attraverso il riporto della lunghezza del segmento definito dai punti *Fpxz'* e *(V)xz* sulla retta *(pxz)σ*..

Il triangolo che ha vertici *C*, *Fr'* e *Fx'* è isoscele; i due lati che passano per *C* e per i vertici *Fr'* e *Fx'* hanno la stessa lunghezza e formano con la base $\overline{Fr'Fx'}$ due angoli di pari ampiezza.
Poiché l'angolo al vertice dovrà avere ampiezza pari a 2 x 56° = 112°, il valore di tali angoli risulterà dalla semplice formula (180°-112°) / 2 = 34°.

Vediamo adesso in che modo le relazioni verificate sul modello possono essere imposte sul piano dell'immagine.
Ricorreremo ancora una volta all'operazione di ribaltamento; la circonferenza di cui ci stiamo occupando appartiene al piano xz.
La cerniera del ribaltamento sarà la *fxz'* e le costruzioni grafiche che applicheremo condurranno alla determinazione di *(V)xz*.
Il punto *(C)xz*, ribaltamento secondo xz del centro *C* della circonferenza, sarà il punto di intersezione di due rette che passano, rispettivamente, per i punti *Fx'* e *Fz'*[1] e formano con la *fxz'* due angoli di 34°.
Tracciata dunque la circonferenza che ha centro in *(C)xz* e passa per i punti *Fx'* e *Fr'*, il punto *(V)xz* sarà il punto di intersezione fra questa circonferenza e la retta *f*σ' (fig. 11).
Si potrà adesso, come fatto in precedenza, tracciare la circonferenza di centro *Fpxz'* che passa per *(V)xz* e trovare il punto *(V)*σ all'intersezione con la retta ortogonale alla *f*σ' che passa per *P*. La distanza da *P* a *(V)*σ è la lunghezza focale (fig. 12).
È utile sottolineare che in tutti i casi fin qui presentati la restituzione per via grafica dell'orientamento interno ha prodotto una lunghezza focale e un valore dell'angolo θ pressoché identici a quelli restituiti dal software di fotogrammetria.
Pur avendo scelto di eseguire le costruzioni grafiche sul piano dell'immagine, è doveroso evidenziare che la determinazione dell'orientamento interno poteva ottenersi direttamente nello spazio, attraverso operazioni di modellazione.
Prendiamo ad esempio la determinazione della lunghezza focale, dati *Fx'* e *Fy'*: la condizione di ortogonalità delle rette che passano per i due punti e si intersecano in un punto della circonferenza di diametro $\overline{Fx'Fy'}$ è assicurata, nello spazio, da una sfera di eguale diametro.

1 I ribaltamenti vanno eseguiti in modo da portare le due rette dalla stessa parte della *fxz'*; un ribaltamento dalla parte opposta a quella proposta nell'immagine produrrebbe una diversa posizione del punto *(C)xz*, ma non muterebbe la lunghezza del segmento che ha estremi *P* e *(V)xz*, obiettivo ultimo della costruzione grafica.

Fig. 13/ La sfera di diametro $\overline{Fx'Fy'}$ interseca in *V* la retta ortogonale al quadro che passa per *P*.

Fig. 14/ La sfera di diametro $\overline{Fx'Fz'}$ interseca in *V* la retta ortogonale al quadro che passa per *P*.

Il punto *V* si troverà all'intersezione, con la sfera, della retta che passa per *P* ed è ortogonale a π (fig. 13). Dati i punti di fuga *Fx'* e *Fz'*, la stessa retta intersecherà in *V* la sfera di diametro $\overline{Fx'Fz'}$ (fig. 14).

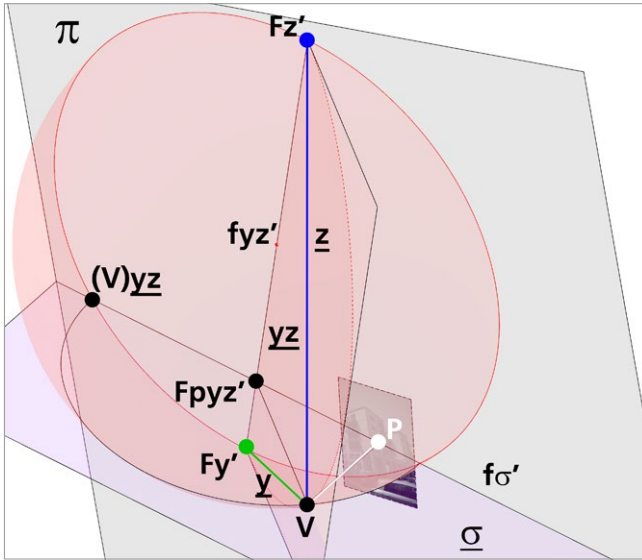
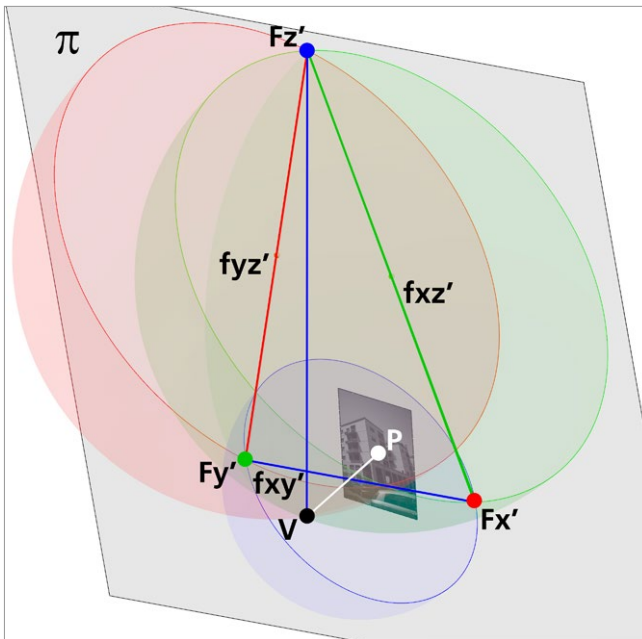



Fig. 15 / La sfera di diametro $\overline{Fy'Fz'}$ interseca in *V* la retta ortogonale al quadro che passa per il punto principale *P*.

Fig. 16/ Soluzione dell'orientamento interno con tre sfere.

Infine, dati i punti di fuga *Fy*' e *Fz*', si costruirà la sfera di diametro $\overline{Fy'Fz'}$. Il punto *V* si troverà, anche in questo caso, all'intersezione fra la sfera e la retta che passa per *P* ed è ortogonale a π (fig. 15).

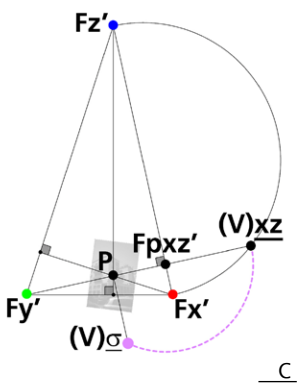
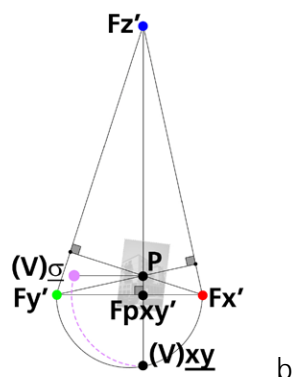
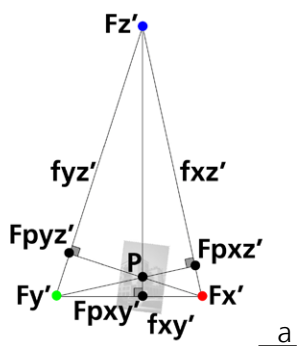
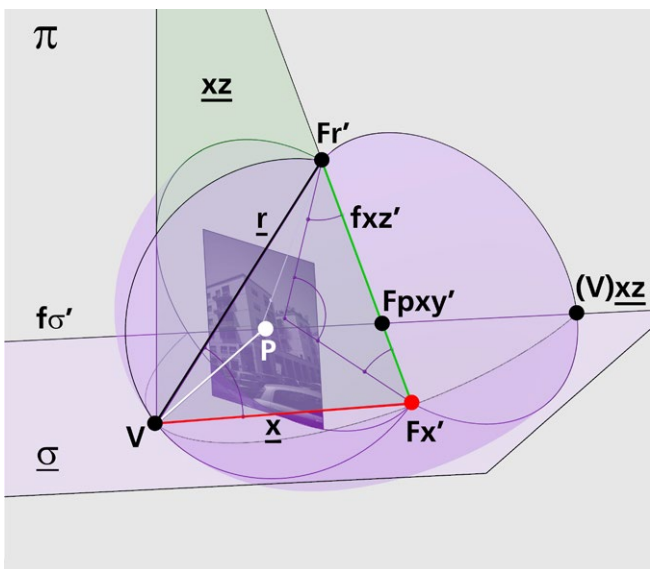



Fig. 17/ a) Ortocentro del triangolo che ha vertici *Fx*', *Fy*', *Fz*'. b) Semicirconferenza di diametro $\overline{Fx'Fy'}$ e individuazione di *(V)xy*. c) Semicirconferenza di diametro $\overline{Fx'Fz'}$ e individuazione di *(V)xz*.

Fig. 18/ Soluzione dell'orientamento con superficie torica.

Quanto finora detto spiega il fondamento geometrico della cosiddetta regola delle tre sfere per l'orientamento interno: date tre coppie di rette ortogonali tra loro, *x*, *y* e *z*, la posizione del centro di presa è data dall'intersezione di tre sfere che hanno diametri nei lati del triangolo i cui vertici sono i tre punti di fuga *Fx*', *Fy*', *Fz*' (fig. 16).
Sul piano del quadro, la soluzione delle tre sfere equivale alla determinazione del punto *P* come ortocentro del triangolo che ha vertici *Fx*', *Fy*' e *Fz*'.
Dato *P*, basterà tracciare una delle semicirconferenza che ha come diametro uno dei tre lati del triangolo; il punto *V* ribaltato si troverà sulla semicirconferenza all'intersezione con l'altezza condotta dal vertice opposto al suo diametro. la distanza focale e l'angolo θ si determinano con le procedure già illustrate (fig. 17).
Qualora l'angolo noto fosse diverso dall'angolo retto, come visto nell'esempio precedente, si provvederà a modellare una superficie torica ottenuta per rivoluzione della circonferenza di centro *C* intorno alla corda delimitata dai punti *Fx*' e *Fr*' (fig. 18).

Orientamento interno con punto principale incognito. Prospettiva a quadro verticale

La disamina delle procedure che conducono alla determinazione dell'orientamento interno è stata condotta, finora, su un'immagine acquisita con una fotocamera standard e reperita nel suo pieno formato; ciò ha permesso di fissare il punto principale *P* nel centro geometrico del fotogramma.
Occorre adesso considerare il caso in cui la posizione del punto principale non sia nota; tale eventualità è estremamente frequente nei processi che mirano alla ricostruzione, tramite restituzione prospettica, di edifici perduti o rimaneggiati.
Quando si opera su fotografie di edifici non più esistenti capita raramente di operare sugli originali o su copie che hanno mantenuto le dimensioni originali. Se le immagini sono tratte da pubblicazioni a stampa bisogna infatti considerare l'eventualità di ritagli funzionali alla veste editoriale; lo stesso può dirsi per le immagini reperite sul web.
La stessa incertezza sulla posizione del punto principale si manifesta, come più volte accennato, quando la fotografia è stata acquisita con una camera da studio; questa evenienza è abbastanza frequente nelle fotografie d'architettura perché la possibilità di spostare l'obiettivo permetteva ai fotografi di inquadrare anche le parti più alte di un edificio senza dover inclinare l'asse di presa, preservando in tal modo il parallelismo delle rette verticali. Quando si opera con le foto d'epoca accade dunque di rado che il processo di restituzione possa avvalersi della conoscenza della posizione del punto principale. Prima di andare al caso più generale della restituzione, occorre dunque fare un cenno alle immagini fotografiche assimilabili a prospettive a quadro verticale.
In questo caso, la restituzione dell'orientamento interno può essere eseguita anche con l'ausilio di rette appartenenti o parallele a un solo piano.

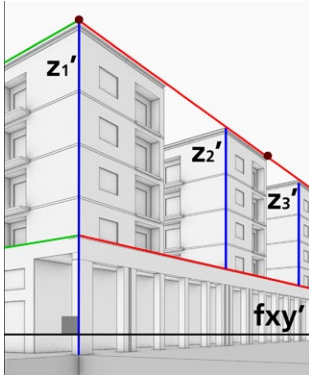



Fig. 19)/ Prospettiva a quadro verticale del modello del caso studio.

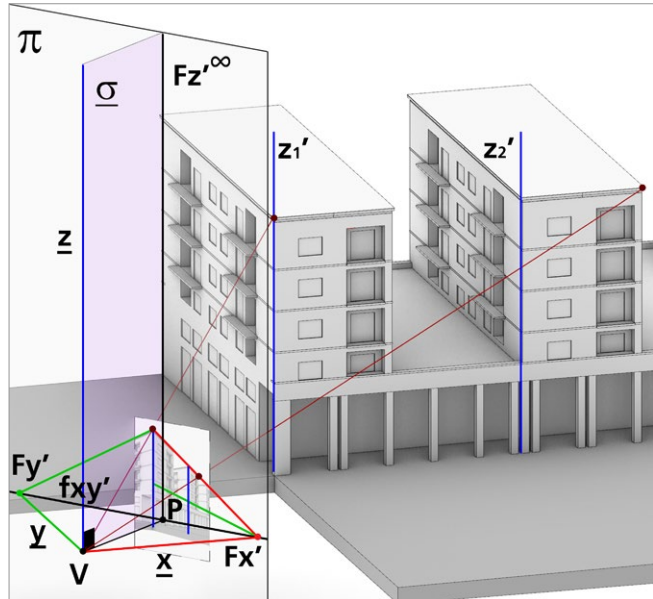
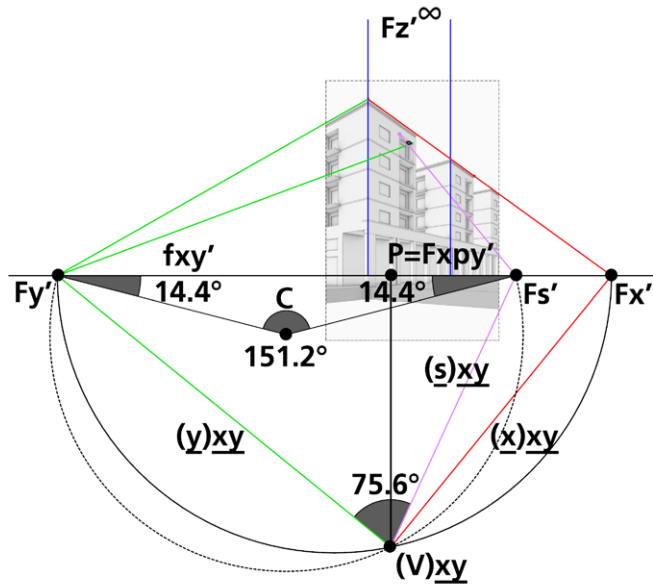
Fig. 20/ Schema prospettico a quadro verticale. Il punto di fuga delle rette verticali è improprio.

Per risalire alla posizione di *P* e alla distanza principale $\overline{VP}$, non basterà tuttavia, come in precedenza, conoscere l'angolo formato da due direzioni di rette, ma occorrerà conoscerne un altro, formato da due nuove direzioni di rette, oppure l'angolo che una nuova direzione forma con una delle direzioni già utilizzate.
Rimandiamo al capitolo seguente una verifica su un'immagine fotografica assimilabile a una prospettiva a quadro verticale e illustriamo il procedimento servendoci di una vista prospettica del modello del caso studio, generata da una camera posta nello stesso punto di presa della fotografia finora utilizzata, ma simulando un quadro perfettamente verticale (figg. 19-20). Ipotizziamo altresì che la posizione del punto principale sia sconosciuta, a causa di ritagli editoriali o dell'utilizzo di una camera da studio.
Il parallelismo delle rette verticali indica che il loro punto di fuga è un punto improprio, ovvero che la retta $\underline{z}$ è parallela al quadro e, di conseguenza, è parallela alla $f\sigma'$.

Fig. 21/ *a-b)* Le rette parallele al quadro hanno punto di fuga improprio e la loro proiezione mantiene invariata la direzione. I segmenti delle rette hanno proiezione ingrandita o ridotta in modo proporzionale. La proiezione del punto medio del segmento è il punto medio del segmento proiettato.

Fig. 22/ Prospettiva a quadro verticale del caso studio. La generazione automatica della prospettiva dal modello fa sì che la fxy' sia perfettamente parallela a due lati del rettangolo che delimita l'immagine, evenienza rara nelle immagini fotografiche.

Quando una retta è parallela al quadro, la sua proiezione conserva invariata la direzione perché il punto di fuga rimane un punto improprio (fig. 21). Per questo motivo, nella prospettiva a quadro verticale, le proiezioni delle rette verticali sono parallele alla *f*σ' e dunque perpendicolari alla *fxy*'.
In questo caso, come già osservato, l'angolo θ è nullo; il punto *P* appartiene alla *fxy*' e coincide con *Fpxy*'.
Trovati i punti di fuga *Fx*' e *Fy*' ci accorgiamo che la *fxy*' non passa per il centro geometrico dell'immagine, ma si trova più in basso (fig. 22).
Per quanto sopra detto, possiamo ipotizzare che l'immagine fotografica a noi pervenuta non abbia mantenuto il formato originale a causa di ritagli, ovvero che sia stata acquisita con una camera da studio che ha permesso la traslazione dell'obiettivo rispetto alla superficie sensibile.
Rimandando al capitolo successivo la descrizione delle caratteristiche peculiari delle camere da studio e delle fotografia acquisita con lo spostamento dell'obiettivo, dobbiamo limitarci a ipotizzare che la

Fig. 23/ La retta che ha direzione s forma con la direzione y un angolo di 75.6° o il suo supplementare.

Fig. 24/ Il centro *C* della seconda circonferenza è dato dall'intersezione delle rette che passano per *Fs'* e *Fy'* e formano angoli di 14,4° con la *fxy'*.

posizione di *P* sulla *fxy'* possa essere individuata solo attraverso ulteriori informazioni sulla scena ritratta nell'immagine. La semicirconferenza di diametro $\overline{Fx'Fy'}$ non basta, da sola, a individuare la posizione di *(V)xy*.

Immaginiamo quindi di conoscere, oltre all'angolo retto formato dalle direzioni x e y, anche l'angolo di 75.6° che una nuova direzione orizzontale s forma con y (fig. 23); in questo caso basterà applicare le relazioni già utilizzate fra angoli al centro e angoli alla circonferenza, per disegnare una nuova circonferenza di centro *C*, che intersecherà la precedente in *(V)xy* (fig. 24).

Appare evidente che è pressoché impossibile conoscere il valore dell'angolo appena utilizzato nella ricostruzione di un edificio non più esistente; accade, per contro, che l'angolo formato da due rette orizzontali possa essere estratto da una rappresentazione cartografica dell'area oggetto di indagine, coeva all'immagine. L'esempio proposto è dunque puramente indicativo.

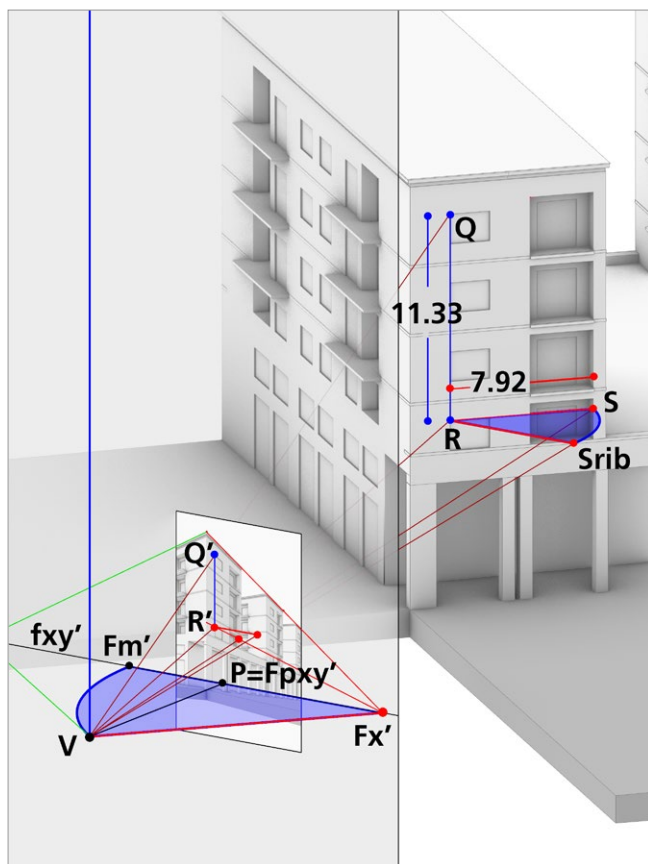



Fig. 25/ Misura di un segmento verticale $\overline{QR}$ e di un segmento $\overline{RS}$ che appartiene a una retta che fuga in *Fx'*.

Un altro metodo, tratto da studi precedenti[2], permette di risolvere lo stesso problema quando siano note la misura di un segmento verticale (parallelo al quadro) e la misura di un segmento orizzontale complanare.

La costruzione ricorre a un ente geometrico ampiamente utilizzato nella pratica tradizionale del disegno di prospettiva: il 'punto di misura'[3].

Dati, sulla facciata dell'edificio due segmenti complanari aventi un punto in comune, ad esempio il segmento verticale $\overline{QR}$ di lunghezza 11,33 m e il segmento orizzontale $\overline{RS}$, che ha direzione $\underline{x}$ e lunghezza pari a 7,92 m (fig. 25), possiamo determinare il punto di misura della retta orizzontale.

2 Il metodo illustrato è una replica della soluzione proposta da Leonardo Paris nel suo libro dedicato alla restituzione prospettica (Paris, 2000, p. 111).

3 Il punto di misura è di solito riferito a una direzione orizzontale e può essere definito in due modi: a) il ribaltamento di *V* sul quadro secondo il piano verticale che contiene la direzione della retta; b) il punto di fuga della retta ortogonale alla bisettrice dell'angolo che la direzione della retta presa in considerazione forma con π.

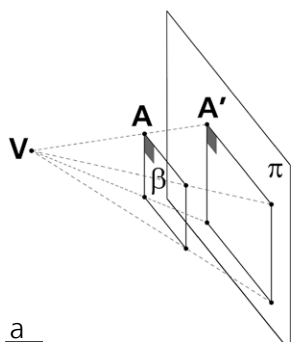
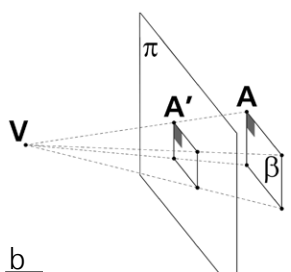
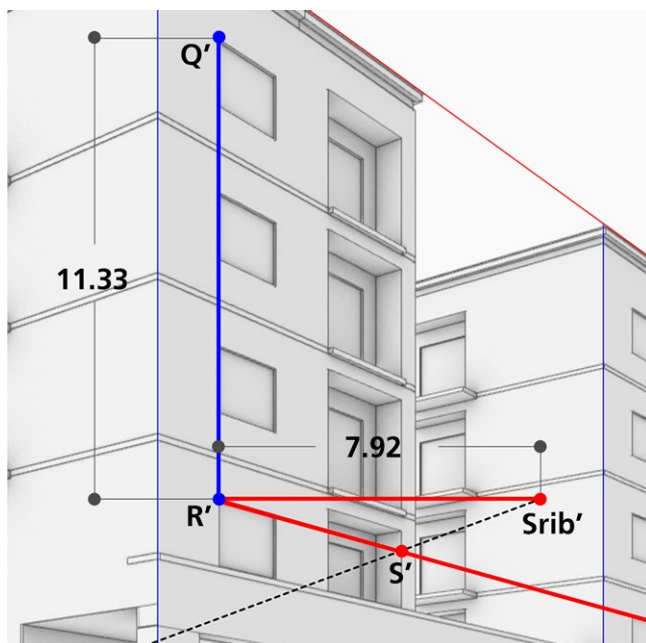



Fig. 26/ *a-b)* La proiezione prospettica di una figura parallela al quadro è una figura omotetica, che conserva la forma e le proporzioni fra i lati.

Fig. 27/ La proporzione fra i segmenti $\overline{QR}$ e $\overline{RS}$ è identica a quella fra i segmenti $\overline{Q'R'}$ e $\overline{R'Srib'}$.

Il punto di misura permette di simulare la rotazione intorno all'asse verticale di qualsiasi segmento che appartiene a una retta di direzione $\underline{x}$; la rotazione fa sì che il segmento diventi parallelo al quadro.
È ben noto che in prospettiva le rette parallele al quadro possono subire, a causa della proiezione, un ingrandimento o una riduzione, che però conserva le proporzioni (fig. 26). Se dunque misuriamo, sull'immagine prospettica, la lunghezza della proiezione del segmento individuato dai punti *Q'* e *R'*, possiamo valutare il rapporto che intercorre fra la misura del segmento proiettato e quella del segmento reale $\overline{QR}$. Se conduciamo, per il punto *R*', una retta parallela alla *fxy'*, possiamo riportare su questa retta, il segmento $\overline{R'Srib'}$; la lunghezza di questo segmento è ottenuta applicando alla misura reale di 7,92 m, il rapporto fra la misura proiettata e la misura reale del segmento $\overline{QR}$. La retta che passa per i punti *S*' e *Srib*' intersecherà la *fxy*' in *Fm*', punto di misura della direzione $\underline{x}$ (fig. 27).

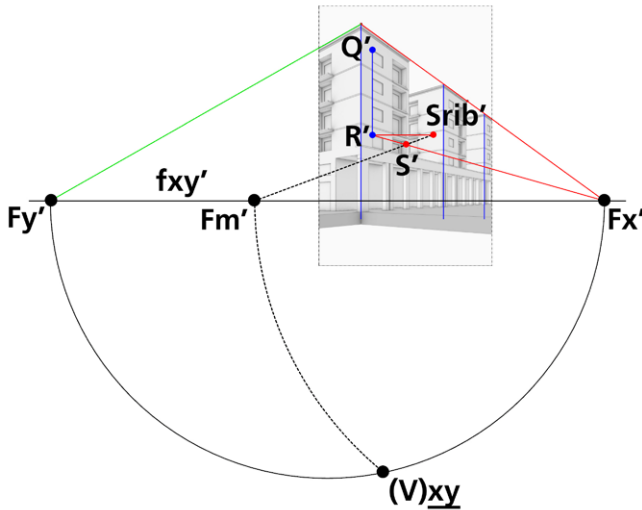



Fig. 28/ Arco di circonferenza di centro *Fx*', che passa per *Fm*'.

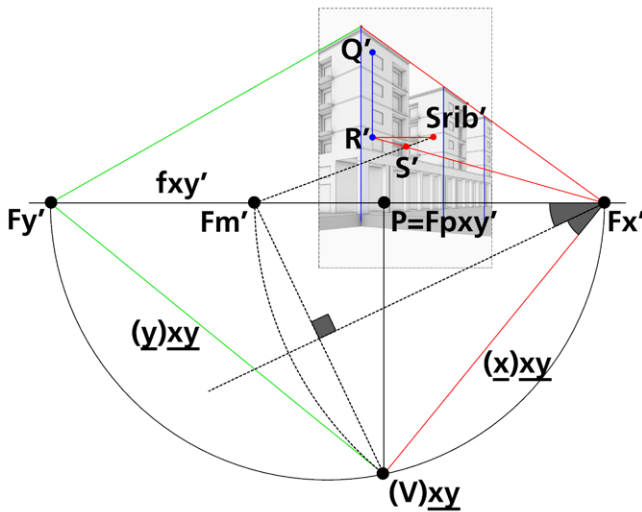
Fig. 29/ Sul ribaltamento di xy la retta che passa per *(V)xy* e *Fm'* è ortogonale alla bisettrice dell'angolo formato da *(x)xy* e dalla *fxy'*.

Basterà infine rappresentare l'arco di circonferenza che ha centro in *Fx*' e passa per *Fm*' (fig. 28).
Tale arco intersecherà la semicirconferenza nel punto *(V)xy;* tracciando per *(V)xy* una retta perpendicolare alla *fxy*' determiniamo, per intersezione, il punto *P* = *Fpxy*' (fig. 29)
Il segmento delimitato dai punti *(V)xy* e *P* misura la lunghezza focale dell'obiettivo.

Fig. 30/ Individuazione dei punti di fuga *Fx*' e *Fy*' e tracciamento della retta di fuga *fxy*'.

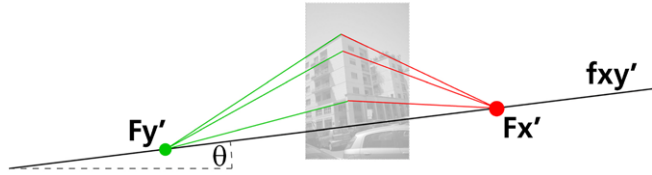
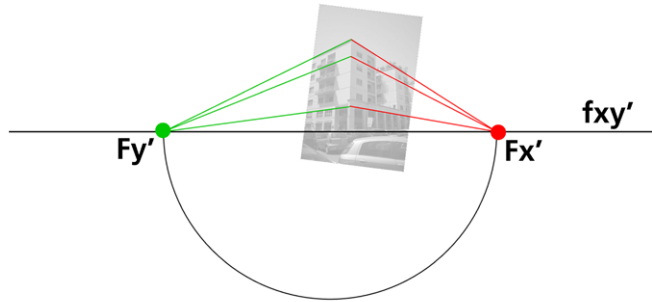



Fig. 31/ Rotazione dello schema prospettico di un angolo θ, tale da assegnare direzione orizzontale alla *fxy'*.

Orientamento interno con punto principale incognito. Caso generale

Esaminiamo adesso il caso più generale, e anche il più frequente, nella restituzione prospettica da immagini fotografiche: quello di un'immagine che raffigura una prospettiva che ha direzione principale (asse di presa) e quadro genericamente disposti, e della quale non è noto il punto principale.

La procedura che ci si appresta a descrivere utilizza le relazioni geometriche e le costruzioni grafiche descritte nei paragrafi che precedono.

Per la determinazione dell'orientamento interno non saranno sufficienti due soli punti di fuga di rette che si intersecano secondo un angolo noto, né basteranno ulteriori punti di fuga di rette complanari alle prime due direzioni; occorrerà conoscere il punto di fuga di rette ortogonali al piano individuato dalla prima coppia di rette.

Iniziamo dal caso più frequente, nel quale sono dati i punti di fuga di rette orizzontali ortogonali tra loro, *Fx*' e *Fy*', ed è noto *Fz*', punto di fuga delle rette ortogonali al piano *xy*.

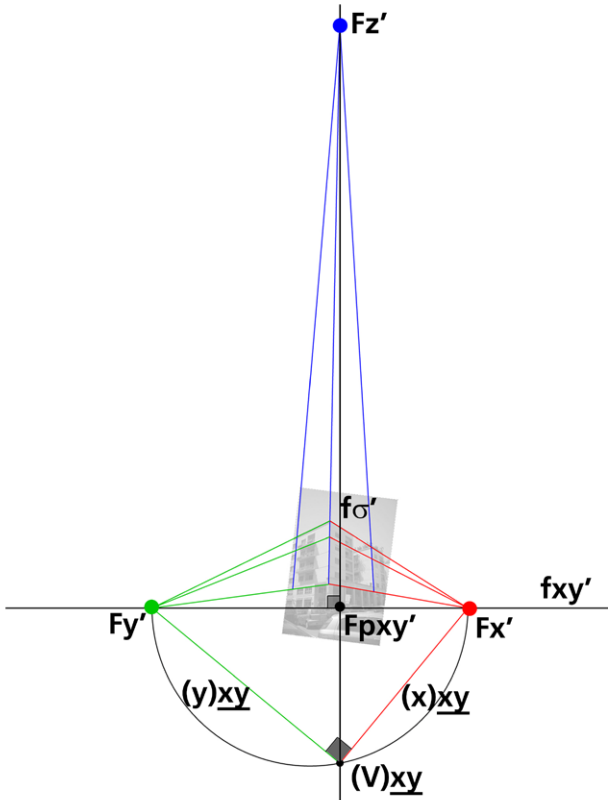
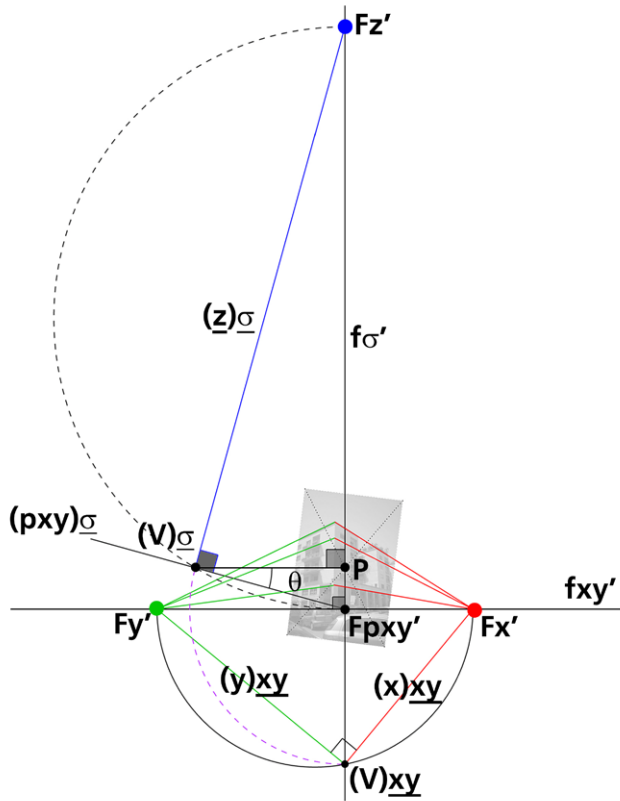
Fig. 32/ Individuazione del punto di fuga *Fz'* e tracciamento della retta *fσ'* ortogonale a *fxy'*.

I primi passaggi ricalcano quelli già descritti, e solo per comodità di lettura si riportano nuovamente le immagini: trovati *Fx*' e *Fy*' e tracciata la retta *fxy*' (fig. 30), si ruota lo schema prospettico per assegnare direzione orizzontale alla *fxy*' e si traccia la semicirconferenza di diametro individuato dai punti *Fx*' e *Fy*' (fig. 31). Si procede quindi come segue:
a) si individua *Fz*' prolungando le rette verticali raffigurate nell'immagine e da questo punto si conduce una retta *fσ*' ortogonale a *fxy*'; la *fσ*' interseca *fxy*' in *Fpxy*' e la semicirconferenza in *(V)xy*; si tracciano quindi *(x)xy* e *(y)xy* (fig. 32);
b) si traccia una nuova semicirconferenza di diametro $\overline{Fpxy'Fz'}$; si traccia inoltre un arco di circonferenza, di centro *Fpxy*', che passa per *(V)xy*.

Fig. 33/ Completamento dell'orientamento interno e misura dell'angolo θ.

Questo arco di circonferenza interseca in *(V)σ* la semicirconferenza di diametro *Fpxy'Fz'*; da *(V)σ* si conduce una retta ortogonale alla *f*σ', ribaltamento dell'asse di presa, determinando, per intersezione, il punto *P*; il segmento delimitato da *P* e *(V)σ* misura la lunghezza focale.
La retta che passa per *Fpxy*' e per *(V)σ* è il ribaltamento della retta di massima pendenza del piano *xy* rispetto al quadro π e l'angolo che essa forma con il ribaltamento dell'asse di presa è θ (fig. 33).
Il risultato delle costruzioni proposte sul quadro può essere ottenuto, nello spazio, attraverso la modellazione di due sfere: il diametro della prima sfera sarà il segmento *Fx'Fy'*; il segmento *Fpxy'Fz'* sarà il diametro della seconda.

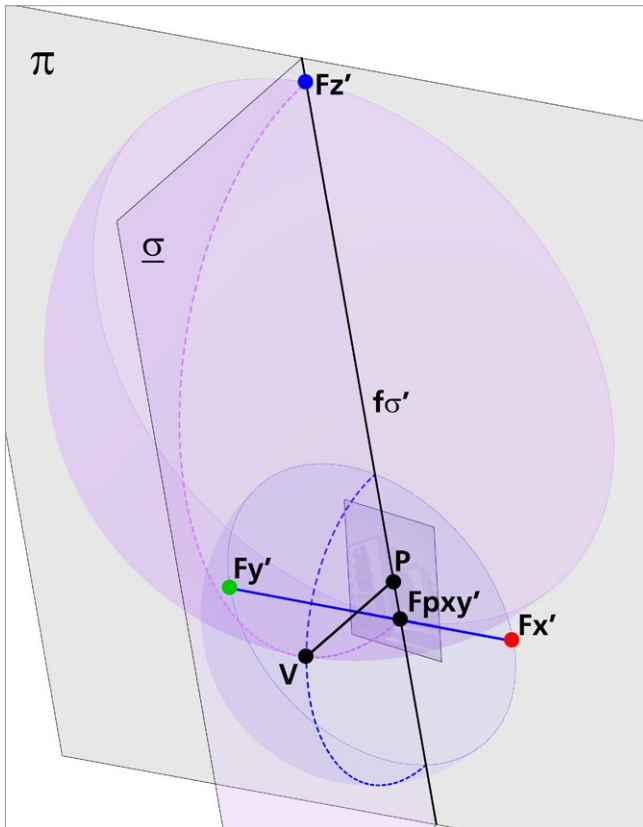



Fig. 34/ Determinazione dell'orientamento interno con la modellazione.

Il punto *V* è dato dall'intersezione delle due circonferenze ottenute dall'intersezione delle due sfere con il piano sezione retta del diedro σ (fig. 34).
Non è questo l'unico modo per ricostruire l'orientamento interno dell'immagine; si può, ad esempio, procedere da due punti di fuga appartenenti a un piano verticale *xz* e utilizzare *Fy'*, punto di fuga delle rette orizzontali ortogonali a tale piano. Dati, ad esempio, *Fx*' e *Fz*', si segue, dopo aver trovato *Fy'*, lo stesso procedimento fin qui mostrato.
Si osserva infine che la lunghezza della distanza focale $\overline{VP}$ restituita differisce di poco più di 1 mm dal valore di 36,2 mm restituito dal software di fotogrammetria, a conferma dell'accuratezza raggiungibile con gli strumenti di disegno digitali.

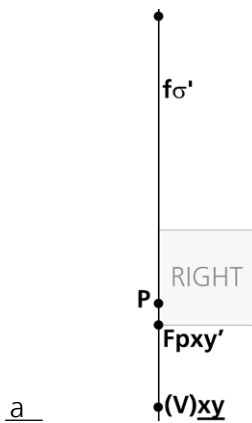
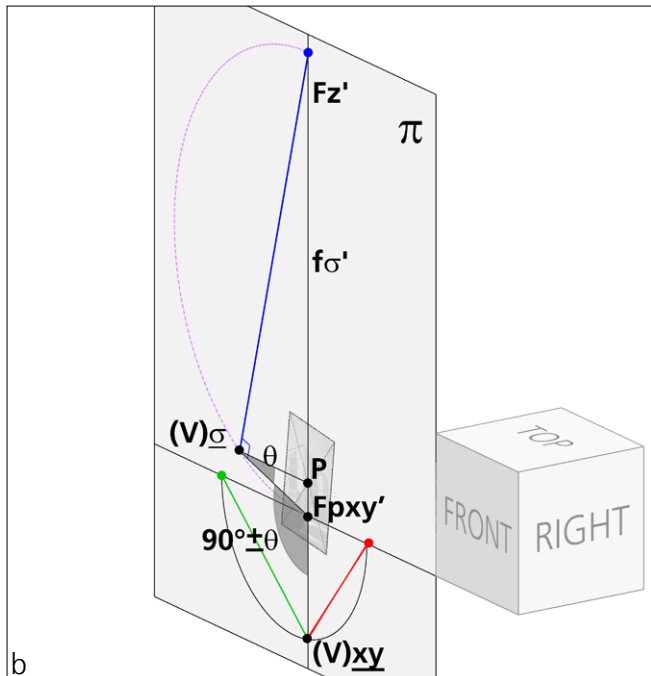



Fig. 35/ Ricostruzione grafica dell'orientamento interno. *a)* Vista destra. *b)* Vista assonometrica.

Orientamento esterno

L'orientamento esterno consiste nel determinare, con riferimento al sistema di assi *x*, *y*, *z*, associato al modello dello stato di fatto, la posizione del centro di proiezione e la direzione dell'asse di presa.
Il sistema di coordinate può essere scelto liberamente, ovvero può essere vincolato a un riferimento cartografico o a un rilievo.
Nel caso finora esaminato, il sistema di coordinate adottato è quello del rilievo con laser scanner dell'area di studio, con asse *z* verticale e asse *x* parallelo ai lati lunghi della corte interna.
Abbiamo mostrato come ricostruire la posizione del centro di proiezione rispetto al piano della fotografia attraverso costruzioni grafiche sul piano di quadro, ovvero nello spazio attraverso la modellazione.
L'orientamento esterno può essere ricostruito con pochi passaggi se si utilizza la modellazione; se invece sono state utilizzate costruzioni grafiche, occor-

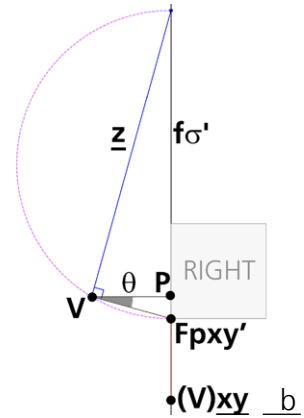
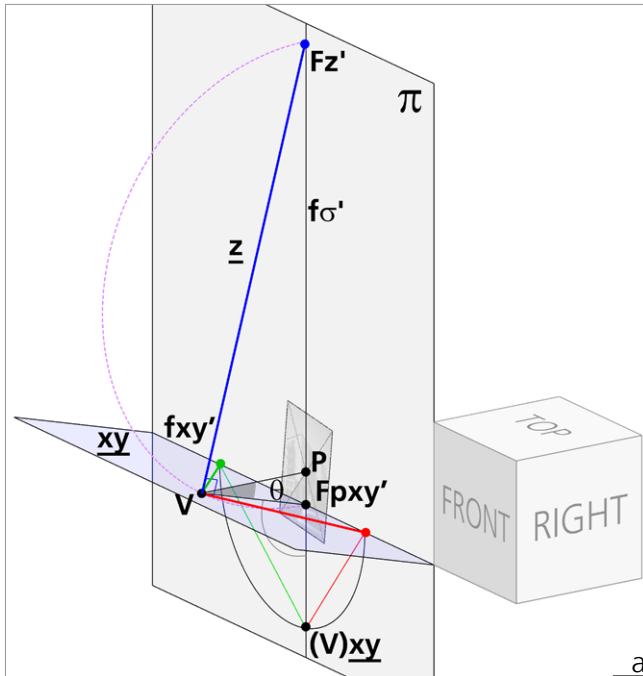



Fig. 36/ Ricostruzione della posizione del centro di proiezione, della distanza principale e delle direzioni delle rette x, y e z. *a)* Vista assonometrica. *b)* Vista destra.

re preliminarmente ricostruire l'assetto spaziale del modello prospettico, percorrendo a ritroso le operazioni di ribaltamento.

Quando l'immagine fotografica viene inserita nel software di disegno e modellazione, essa può essere associata a uno dei piani coordinati, *xy*, *xz*, *yz*. A ognuno di questi piani corrisponde una vista ortografica: a) Piano *xy*, vista Superiore, *Top*; b) Piano *xz*, vista Frontale, *Front*; c) Piano *yz*, vista Destra, *Right*. Nel caso in esame l'immagine è stata inserita sul piano *xz* e le costruzioni grafiche sono state condotte sulla vista frontale (fig. 35). Il cerchio di diametro $\overline{Fpxy'Fz'}$, e con esso l'asse di presa delimitato da *(V)* σ e *P*, viene ruotato di un angolo retto intorno alla *f*σ'; si determina così, nello spazio, la posizione di *V*, la direzione *pxy* della retta di massima pendenza del piano orizzontale e la direzione della retta *z*.

Il piano individuato dalla *pxy* e dalla *fxy*', incidenti in *Fpxy*', è *xy* (fig. 36).

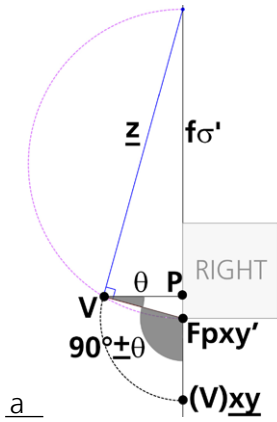
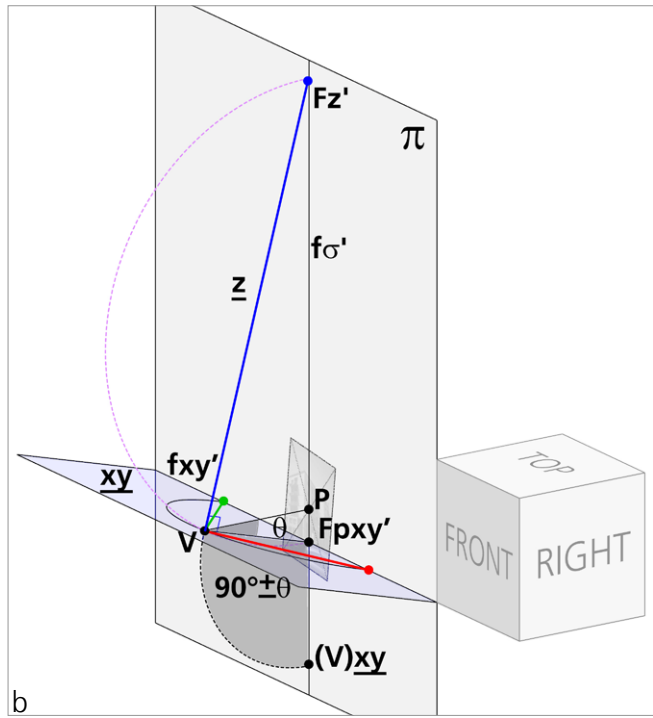



Fig. 37/ Movimento inverso al ribaltamento sul quadro delle rette *x* e *y* intorno alla retta *fxy*', di un angolo pari a 90°+θ. *a)* Vista destra. *b)* Vista assonometrica.

Il cerchio di diametro $\overline{Fx'Fy'}$, e con esso le rette *x* e *y*, vengono ruotati intorno alla *fxy*' di un angolo pari al supplementare dell'angolo diedro formato da *xy* e da π, misurato dall'angolo 90°±θ, formato dalla *pxy* e dalla *f*σ'; nel caso esaminato, 90+θ.

Si determinano così le direzioni nello spazio delle rette *x* e *y* (fig. 37).

Terminato il processo di ricostruzione spaziale dello schema prospettico, possiamo procedere al suo orientamento esterno. Il primo passaggio consiste nell'eseguire una rotazione che assegni direzione verticale alla retta *z* e giacitura orizzontale al piano *xy*. La rotazione viene eseguita intorno alla retta *fxy*' e ha ampiezza pari a θ (fig. 38). Il passaggio successivo consiste in una rotazione dello schema prospettico intorno alla retta *z*, tale da assegnare alle rette *x* la direzione dell'asse corrispondente nel sistema di riferimento dello spazio di lavoro virtuale.

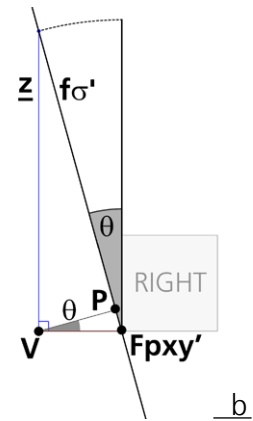
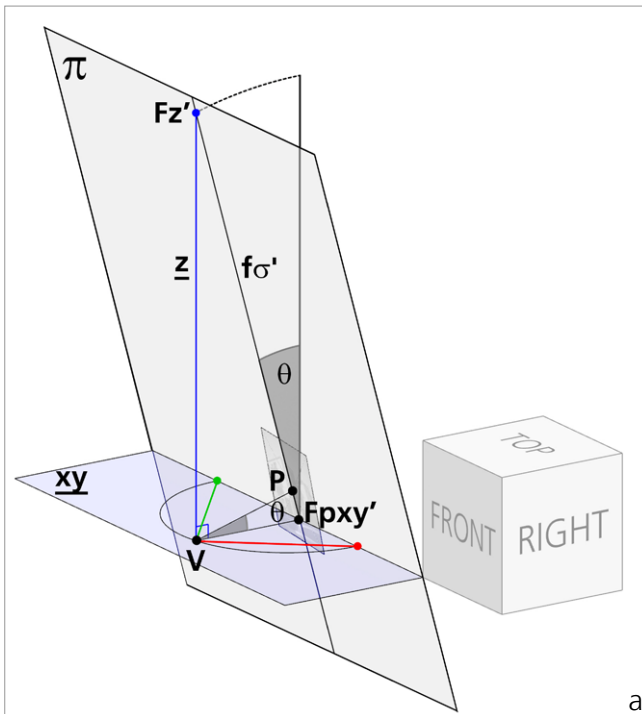



Fig. 38/ Rotazione θ dello schema prospettico intorno alla retta *fxy'*. *a)* Vista assonometrica. *b)* Vista destra.

Nel caso in esame, la rotazione, di ampiezza pari a ι, assegnerà alla retta $\underline{x}$ dello schema prospettico la direzione dell'asse *x* della terna cartesiana di riferimento del rilievo con laser scanner (fig. 39). Le due rotazioni hanno permesso di fissare l'orientamento del modello prospettico. Rimane da definire, per completare l'orientamento esterno, la posizione del punto nodale, ovvero la posizione della camera al momento dello scatto. Anche per il calcolo della posizione ci si avvale di costruzioni grafiche, utilizzando la 'regola del parallelogramma'. Per l'applicazione della regola occorre conoscere la lunghezza di un segmento riconoscibile nell'immagine fotografica. Nota, ad esempio, la lunghezza del segmento $\overline{AB}$ che appartiene a una retta che fuga in *Fx*', si procede come segue: a) si tracciano nello spazio le rette proiettanti per i punti *A*' e *B*'; b) sulla retta $\underline{x}$ si stacca, da *V*, un segmento $\overline{VW}$ di lunghezza pari al

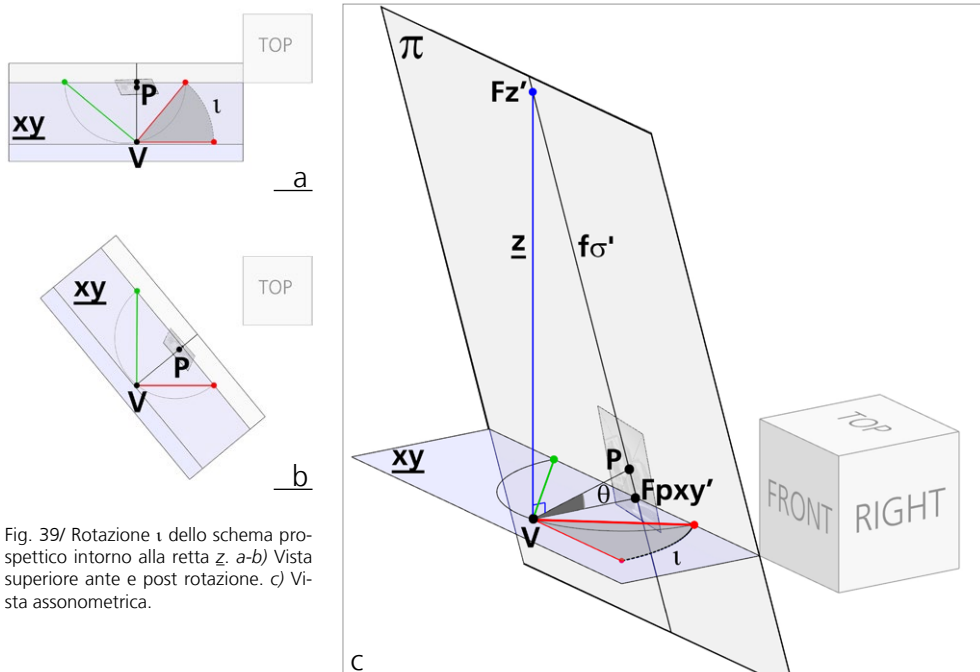



Fig. 39/ Rotazione ι dello schema prospettico intorno alla retta z. *a-b)* Vista superiore ante e post rotazione. *c)* Vista assonometrica.

segmento $\overline{AB}$; c) per il punto *W* si traccia una retta parallela a una delle due rette proiettanti, in questo caso alla retta che passa per *A*'; d) questa retta interseca la retta proiettante che passa per *B*', determinando la posizione di *B*; e) la retta parallela a *x* che passa per *B* interseca in *A* la retta proiettante che passa per *A*'. Si configura così un parallelogramma di vertici *V*, *W*, *B* e *A* (fig. 40). Il modello può adesso essere traslato in modo che il segmento $\overline{AB}$ occupi la posizione desiderata nello spazio tridimensionale (fig. 41). A partire dal segmento $\overline{AB}$ sarà possibile avviare il processo di ricostruzione del modello. Rimandiamo la descrizione delle procedure di restituzione alle pagine che seguono e ci limitiamo, in questa fase, a verificare la congruenza fra la posizione e l'orientamento della camera, prodotti dalle costruzioni grafiche, e quelle risultanti dal rilievo fotogrammetrico. La posizione del centro di proiezione si scosta di circa 20 cm da quella risultante dal cal-

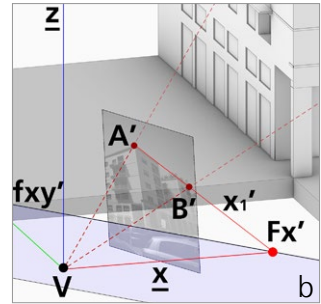
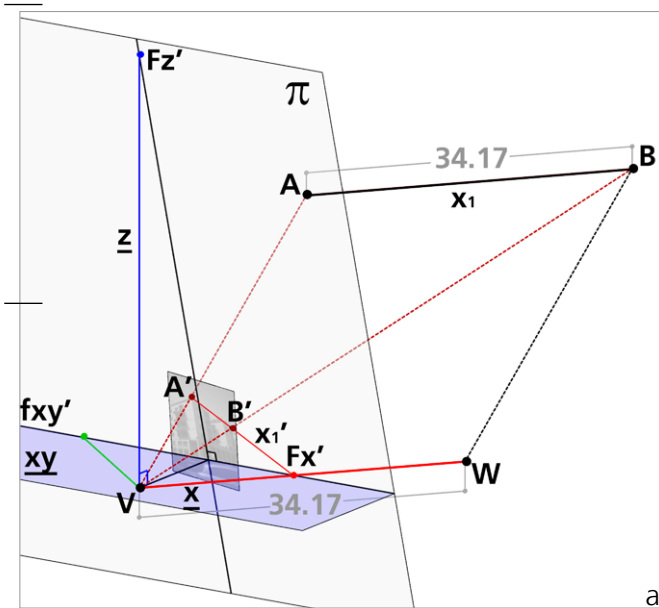



Fig. 40/ Regola del parallelogramma *a)* Vista assonometrica del modello prospettico. *b)* Vista di dettaglio delle rette proiettanti.

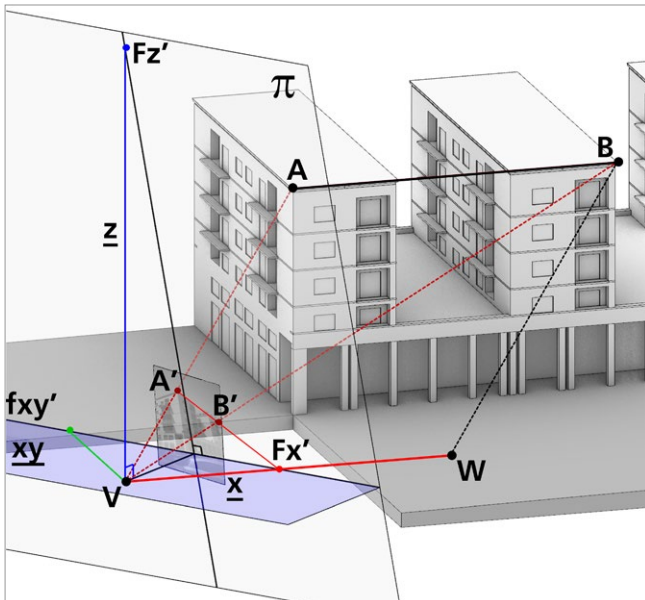
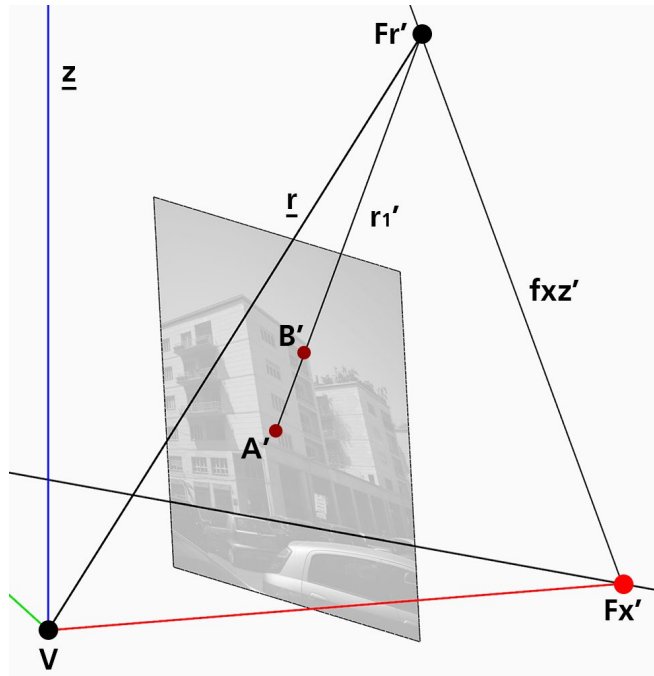
Fig. 41/ Posizionamento dello schema prospettico.

colo fotogrammetrico, mantenendo un'altezza dal suolo assolutamente verosimile, dunque accettabile per le finalità legate alla ricostruzione di edifici non più esistenti.

Fig. 42/ Applicazione della regola del parallelogramma su una retta di direzione generica. Schema prospettico.

Al fine di dimostrare il carattere di generalità della regola del parallelogramma, ipotizziamo che il segmento noto di lunghezza $\overline{AB}$ appartenga questa volta alla retta r_1, introdotta nelle pagine che precedono (fig. 42). Vale anche in questo la procedura già esposta: a) si tracciano le rette proiettanti per *A*' e *B*'; b) sulla retta $\underline{r}$ si stacca, a partire da *V*, un segmento $\overline{VW}$ di lunghezza pari ad $\overline{AB}$; c) per il punto *W* si traccia una retta parallela alla retta proiettante che passa per *A*'; d) questa retta interseca la retta proiettante che passa per *B*', individuando il punto *B*; e) la retta che passa per *B* ed è parallela a $\underline{r}$ interseca nel punto *A* la retta proiettante che passa per *A*'. Si viene così a configurare, ancora una volta, un parallelogramma di vertici *V*, *W*, *B* e *A* (fig. 43). Anche in questo caso il modello viene traslato in modo che il lato $\overline{AB}$ del parallelogramma si sovrapponga al segmento corrispondente nello spazio tridimensionale (fig. 44).

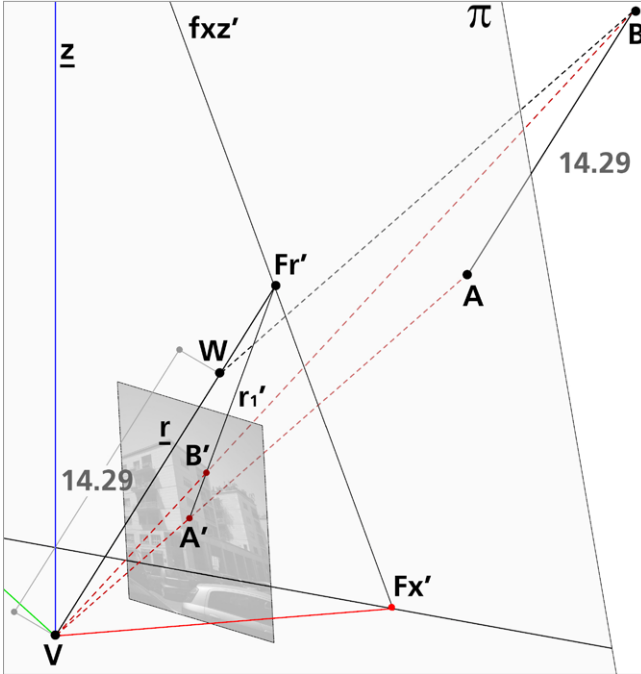
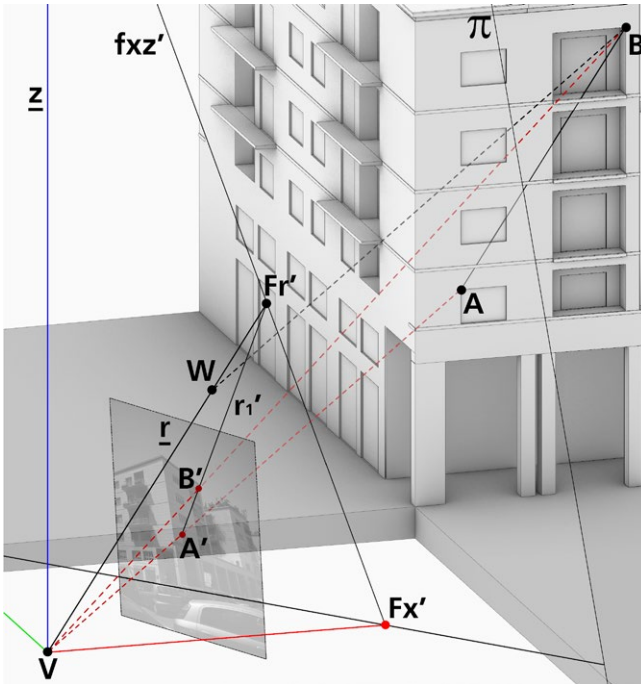



Fig. 43/ Applicazione della regola del parallelogramma su una retta avente direzione generica. Riporto della misura sulla retta che proietta il punto improprio della retta assegnata e posizionamento nello spazio del segmento di lunghezza nota.

Fig. 44/ Traslazione del modello prospettico.

Va osservato fin da adesso che la determinazione della posizione del punto nodale ha duplice rilevanza nel processo di restituzione.
Ricordando che il punto nodale dell'obiettivo fotografico coincide con il centro di proiezione *V* del modello proiettivo, determinarne la posizione permette di verificare la correttezza delle procedure di orientamento interno ed esterno: se il punto nodale dovesse cadere, nel contesto raffigurato dalla fotografia, in posizioni incompatibili con l'acquisizione dell'immagine, ad esempio sotto il suolo o dietro un muro, occorrerebbe riconsiderare i processi di orientamento interno ed esterno. La determinazione di *V* permette inoltre di inserire, nel contesto attuale, il modello ricostruttivo delle architetture e degli scenari urbani non più esistenti, schiudendo la possibilità di costruire prodotti digitali destinati alla fruizione diffusa degli scenari ricostruiti.

4
Restituzione da immagini riprese con camere da studio

Nel suo trattato *La Métrophotographie*, Deneux menziona a più riprese immagini fotografiche acquisite con il 'decentramento' dell'obiettivo; chiarisce, fin dalle prime pagine, che lo scopo del decentramento è quello di ampliare verso l'alto l'inquadratura, per fotografare un edificio in 'tutta la sua altezza'.

> Tous ceux qui ont photographié des monuments savent que, pour obtenir l'image d'un édifice dans toute sa hauteur, et pour réduire en même temps, l'importance du terrain sur le cliché, on a recours au décentrement vertical de l'objectif.[1]

Ciò che Deneux non dichiara esplicitamente, ma sottintende, è che la foto di un monumento deve preservare il parallelismo delle rette verticali dalle deformazioni prospettiche.
Questa condizione si ottiene, come già detto, solo se la superficie sensibile della camera ha, al momen-

[1] Deneux H., 1934, p. 64.

to dello scatto, giacitura verticale, ossia se l'asse di presa ha direzione orizzontale. Quando, però, il decentramento e l'adozione di un obiettivo grandangolare non sono sufficienti a inquadrare l'intero edificio, occorre allora 'rassegnarsi' a inclinare l'asse di presa[2].

Bien souvent, les clichés doivent être pris inclinés, à cause du peu de recul et de la grande hauteur des édifices, que le décentrement, et le grand-angle des objectifs, ne parviennent pas toujours à atteindre[2].

Deneux spiega subito quali siano le peculiarità di una prospettiva fotografica a quadro verticale, nel caso in cui la camera utilizzata non permetta il decentramento.

Lorsque l'appareil photographique employé ne permet pas le décentrement de l'objectif, dans le sens vertical, la ligne d'horizon se trouve au milieu de la hauteur du cliché, à la condition, toutefois, que le cliché ait été pris verticalement, c'est-à-dire l'appareil étant tenu parfaitement de niveau[3].

Nelle camere che non permettono il decentramento, la linea d'orizzonte si trova 'a metà dell'altezza dell'immagine', ovvero passa per il punto principale. Poche righe dopo spiega cosa accade quando il quadro è ancora verticale, ma l'inquadratura è stata modificata con il decentramento verticale.

Lorsque le tableau est vertical, le point principal se trouve sur la ligne d'horizon, à la rencontre de cette ligne avec l'axe vertical du cliché. Les photographes décentrent rarement l'objectif dans le sens horizontal[4].

Nelle camere che permettono il decentramento verticale, il punto principale continua ad appartenere alla linea d'orizzonte, ma questa stessa non si tro-

2 Deneux H., 1934, p. 8.
3 Deneux H., 1934, p. 8.
4 Deneux H., 1934, p. 9.

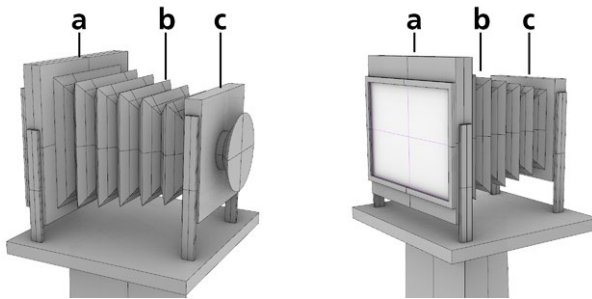



Fig. 1/ Rappresentazione schematica di un banco ottico. a) Standarta posteriore; b) Soffietto; c) Standarta anteriore.

va più a metà dell'altezza dell'immagine; il punto principale non è più, dunque, il centro geometrico dell'immagine. L'eccentricità del punto principale è la particolarità più evidente delle immagini acquisite con il decentramento: parliamo ovviamente di immagini esaminate nella loro interezza, nelle quali l'eccentricità non è riconducibile a ritagli editoriali.
Deneux ritiene che soltanto il decentramento verticale sia funzionale.

Il ne sera jamais fait usage du décentrement horizontal, qui déplacerait la ligne verticale principale et compliquerait les restitutions, bien inutilement. Il est préférable et plus simple de faire pivoter l'appareil sur son pied[5].

Nelle camere di cui parla Deneux, la parte che ospita la superficie sensibile (lastra, pellicola), detta standarta posteriore, e la parte su cui si innesta l'obiettivo, detta standarta anteriore, non sono vincolate rigidamente, ma sono collegate da un soffietto flessibile, impenetrabile alla luce (fig. 1).
Queste macchine, dette 'banco ottico' o 'camera da studio', sono oggi raramente utilizzate per le fotografie di architettura, mentre continuano a essere usate negli studi fotografici, perché permettono un controllo della messa a fuoco e dell'inquadratura più accurato rispetto alle camere fotografiche standard.
Nel lungo periodo che va dalla nascita della tecnica fotografica alla diffusione delle camere digitali, gran

5 Deneux H., 1934, p. 64.

parte delle fotografie d'architettura mostrano chiari indizi di decentramenti eseguiti con una camera da studio.
Le camere da studio sono certamente poco maneggevoli, ma questo aspetto doveva essere considerato secondario, sia perché le camere standard per lungo tempo non sono state molto più piccole o leggere, sia perché il parallelismo delle rette verticali era ritenuto una qualità irrinunciabile nelle foto d'architettura.

I movimenti dell'ottica

Le macchine da studio permettono di muovere sia la standarta anteriore che quella posteriore; i movimenti che le standarte possono compiere sono: a) decentramenti, ovvero traslazioni in direzione verticale e orizzontale (figg. 2a-b); b) basculaggi, ossia rotazioni, intorno a un asse orizzontale o verticale (figg. 2a-b).
In questa sede, per semplicità di illustrazione, sono stati simulati soltanto i movimenti della standarta anteriore porta obiettivo.
I basculaggi permettono di agire sulla messa a fuoco regolando la profondità di campo, ma non modificano la posizione del punto principale, che rimane al centro dell'immagine; i decentramenti, invece, cambiano la posizione del punto principale.
Il decentramento orizzontale sposta il punto principale in posizione eccentrica lungo l'asse orizzontale dell'immagine; il decentramento verticale sposta il punto principale lungo l'asse verticale dell'immagine fotografica.
Se il decentramento verticale sposta l'obiettivo verso l'alto, il punto principale e la *fxy'* si troveranno nella parte inferiore dell'immagine; viceversa, un decentramento dell'obiettivo verso il basso verso porta il punto principale e la fxy' nella parte superiore dell'immagine.

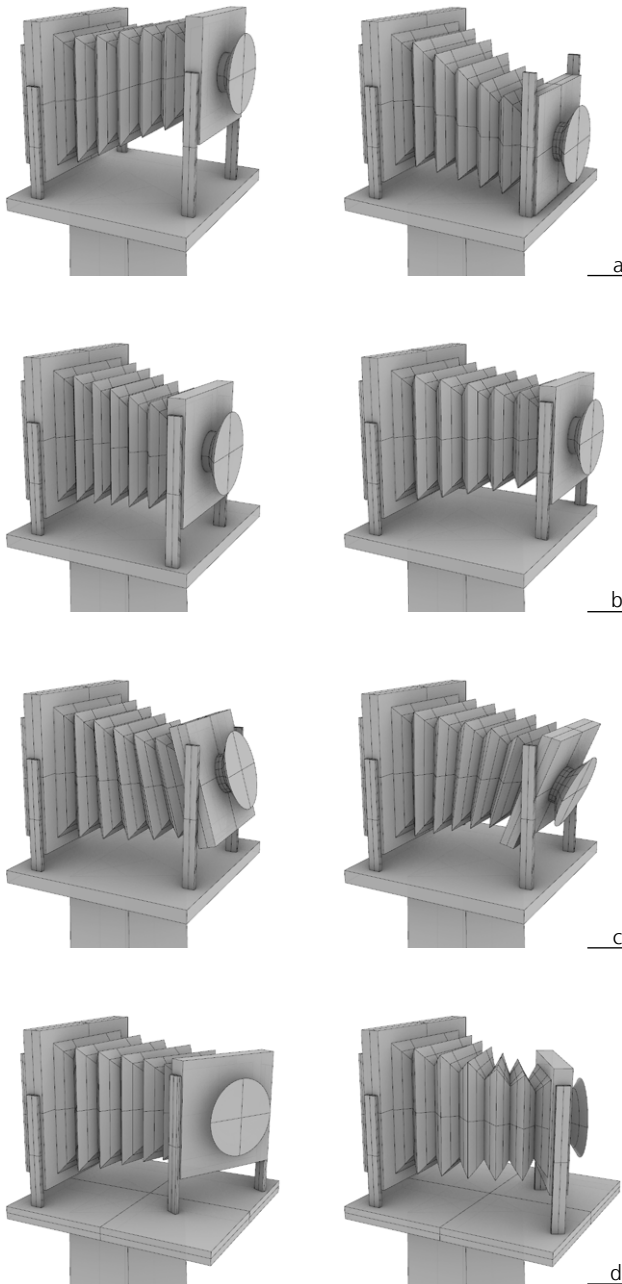



Fig. 2/ *a)* Decentramento verticale. *b)* Decentramento orizzontale. *c)* Basculaggio intorno a un asse orizzontale. *d)* Basculaggio intorno a un asse verticale.

Fig. 3/ Foto di Santa Maria delle Grazie a Milano. Laussedat A., 1899, Planche 1. La linea d'orizzonte, la traccia del piano sezione retta e il punto principale sono evidenziati in rosso.

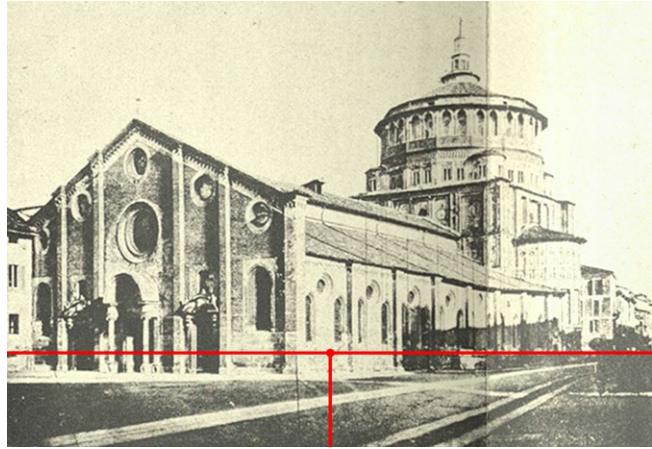



Fig. 4/ Foto della chiesa di Meudon. Deneux H., 1930, Planche XXXII. Si noti la presenza di un leggero decentramento orizzontale, che sposta la retta di fuga del piano sezione retta in posizione eccentrica.

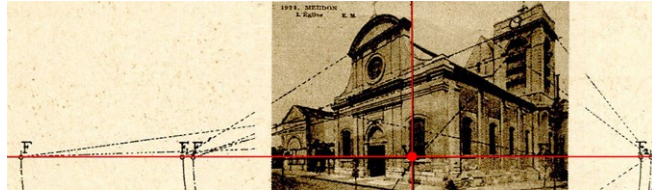



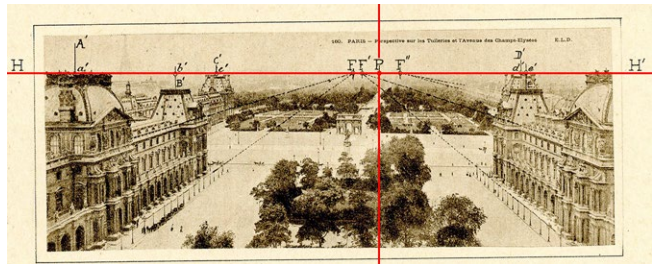
Fig. 5/ Foto dei giardini delle *Tuileries* e del viale degli *Champs-Elysées* a Parigi Deneux H., 1930, Planche XVI. Questa foto è stata ripresa dalle coperture ed è stato eseguito un decentramento verticale verso il basso, che ha spostato la linea d'orizzonte nella parte superiore del fotogramma. Si noti anche la presenza di un accentuato decentramento orizzontale e di una rotazione della camera intorno all'asse di presa.

La foto di Santa Maria delle Grazie, che Laussedat utilizza per illustrare il procedimento di restituzione, è una prospettiva a quadro verticale con le rette verticali parallele tra loro e ortogonali alla linea d'orizzonte.
La linea d'orizzonte corre lungo la parte bassa dell'immagine e il punto principale si trova sull'asse verticale (fig. 3). Si può dedurre che l'immagine sia stata acquisita con un banco ottico operando il solo decentramento verticale.
Anche la foto della chiesa di Meudon, utilizzata da

Fig. 6)/ Banco ottico in posizione prima dell'acquisizione della foto utilizzata più avanti. Si noti il decentramento verso l'alto della standarta anteriore.

Deneux, è una prospettiva a quadro verticale con la linea d'orizzonte nella parte bassa, ma il punto principale non si trova esattamente sull'asse verticale dell'immagine, segno di un leggero decentramento orizzontale, forse casuale (fig. 4). La foto dei giardini delle *Tuileries* a Parigi, ancora dal libro di Deneux, mostra invece la linea d'orizzonte nella parte alta del fotogramma, poiché la standarta anteriore è stata traslata verso il basso; la marcata eccentricità del punto principale dall'asse verticale dell'immagine è la conseguenza di un decentramento orizzontale introdotto dal fotografo (fig. 5).

Orientamento di immagini decentrate

Al fine di illustrare le caratteristiche proiettive delle immagini caratterizzate da decentramenti, si è provveduto a fotografare il luogo scelto come caso studio con una camera da studio[6].
Per una maggiore chiarezza espositiva, è stata scelta un'immagine acquisita con il solo decentramento verticale (fig. 6), che ritrae la corte aperta da un punto di presa prossimo a quello della foto utilizzata

6 Le foto con camera da studio di piazzale Ungheria sono state realizzate dal Prof. Sandro Scalia, docente di Fotografia presso l'Accademia di Belle Arti di Palermo, che ha gentilmente offerto la propria disponibilità a contribuire a questa ricerca.

Fig. 7/ Regolazione dell'inquadratura sul vetro smerigliato prima della collocazione dell'alloggiamento della pellicola. Si noti il reticolo inciso sul vetro per facilitare il controllo della prospettiva.

Fig. 8/ Immagine acquisita con decentramento verticale.

finora per l'illustrazione della costruzione prospettica e della restituzione (figg. 7-8). Anche per questa immagine è stata verificata la possibilità di ritrovare, con costruzioni grafiche, l'orientamento interno ed esterno e calcolare a ritroso l'entità del decentramento.
Il primo passaggio è stato dedicato al tracciamento della linea d'orizzonte, dati i punti di fuga di rette orizzontali, e alla rotazione dello schema prospettico necessaria ad assegnare direzione orizzontale alla *fxy*' (fig. 9).
L'angolo di rotazione è risultato molto piccolo, poiché il reticolo impresso nel vetro smerigliato della standarta posteriore ha permesso al fotografo

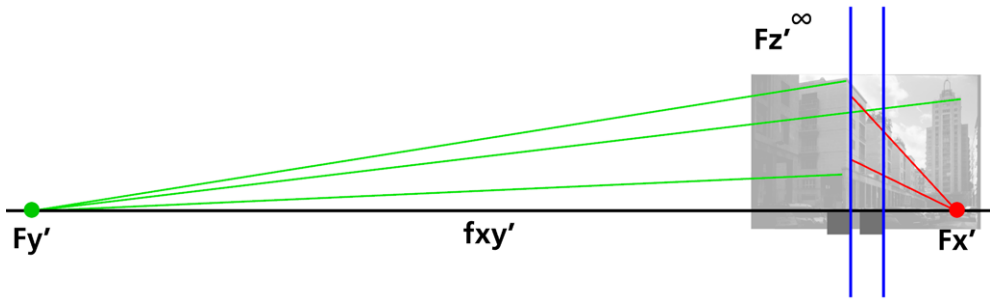



Fig. 9/ Schema prospettico risultante dal tracciamento della *fxy*' per i punti *Fx*' e *Fy*' e dalla rotazione che le conferisce direzione orizzontale.

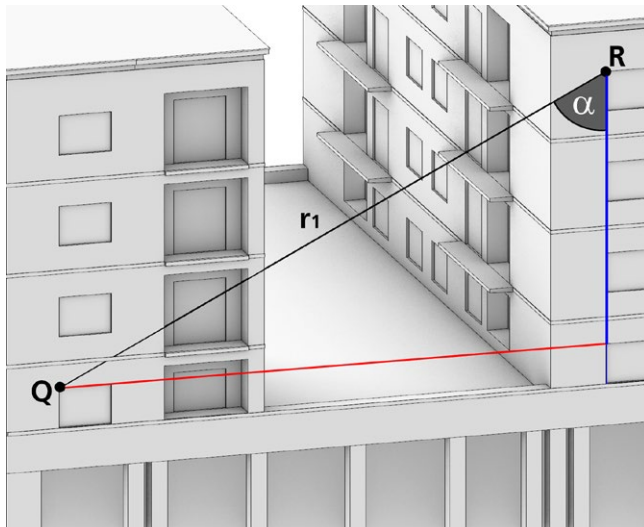
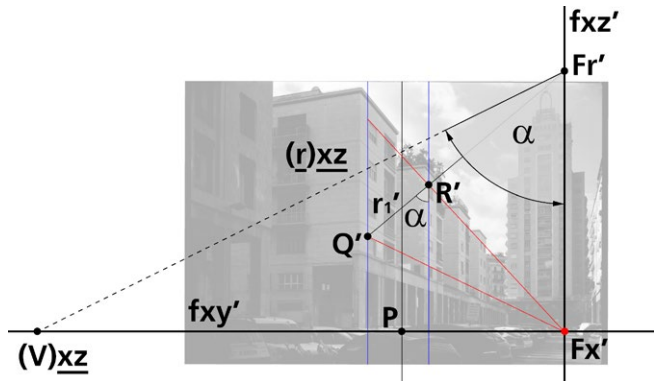
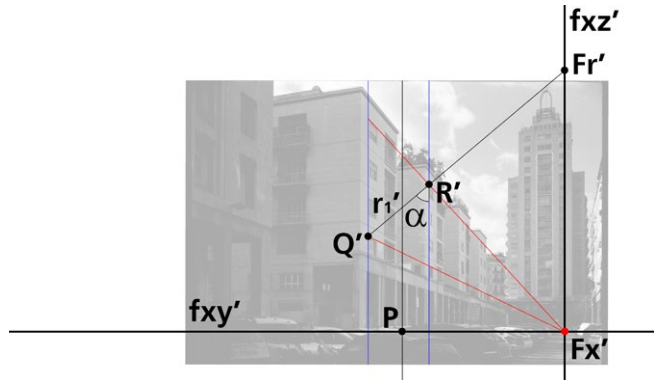



Fig. 10/ Angolo α formato da una retta verticale e da una retta r_1 sul piano della facciata di un edificio.

di controllare il parallelismo fra le rette verticali e il reticolo inciso sul vetro smerigliato. Nelle pagine precedenti sono stati proposte due soluzioni per la determinazione dell'orientamento interno di una prospettiva a quadro verticale: la prima utilizza due angoli formati da rette orizzontali; la seconda, una retta verticale e una retta orizzontale incidente. Proponiamo qui un'ulteriore soluzione, già anticipata nel corso della trattazione del caso generale della prospettiva, che abbina, all'angolo formato dalle rette orizzontali che fugano in *Fx*' e *Fy*', un ulteriore angolo α, formato da due rette che appartengono alla facciata di uno dei corpi di fabbrica: una retta con direzione $\underline{r}$ e una retta verticale (fig. 10).

Fig. 11/ Angolo α formato da una retta verticale e da una retta r_1 sul piano della facciata di un edificio. Determinazione del punto di fuga *Fr*' sulla *fxz'*.

Fig. 12/ Tracciamento della retta *(r)xz* che forma con la *fxz'* un angolo α e interseca la *fxy'* nel punto *(V)xz*.

Al piano della facciata appartengono rette verticali, che fugano in Fz'^{∞}, e rette orizzontali fugano in *Fx*'; la retta di fuga *fxz*' è dunque la retta verticale che passa per *Fx*'. Il punto di fuga *Fr*' sarà dato dall'intersezione fra la *fxz*' e la r_1' (fig. 11).
Tracciamo adesso una retta che passa per *Fr*' e forma, con la *fxz*', l'angolo α.
Questa retta è *(r)xz*, ribaltamento su π della retta *r* che appartiene al piano *xz*.
L'intersezione fra questa retta e la *fxy*' sarà *(V)xz* (fig. 12). L'arco di circonferenza che ha centro in *Fx*' e passa per *(V)xz* interseca la semicirconferenza di diametro $\overline{Fx'Fy'}$ nel punto *(V)xy*[7] .
La retta fσ', che passa per *(V)xy*, interseca la *fxy*' ad angolo retto in *P*; il segmento dato dai punti *(V)xy* e *P* misura la distanza principale (fig. 13).

7 La fxy' assume il ruolo di retta traccia del piano sezione retta formato da xz e π, la cui costola e *fxz*'.

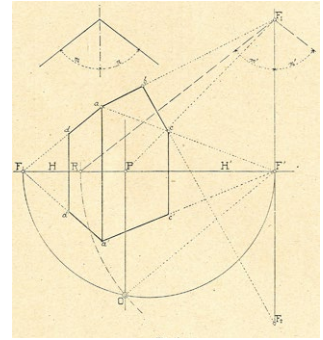
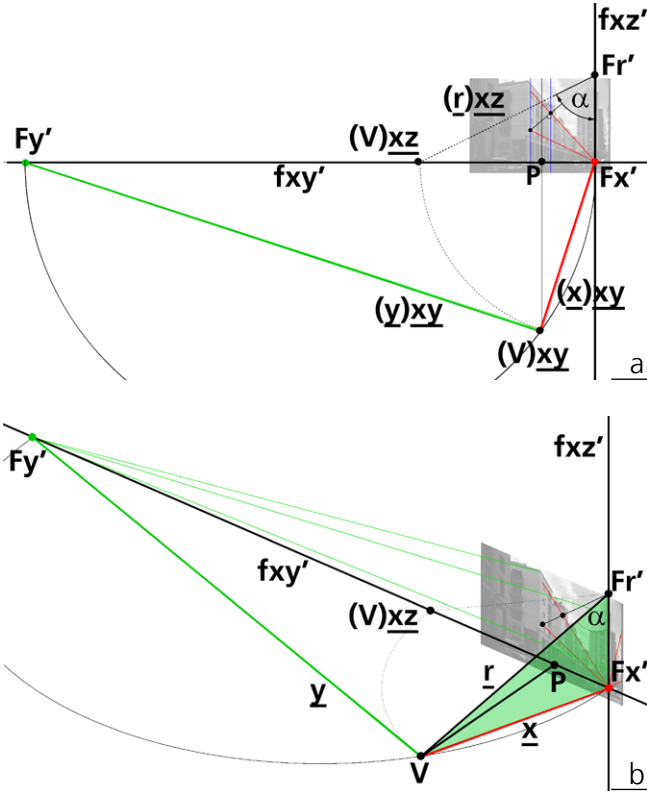



Fig. 13/ *a)* Costruzione grafica sul piano dell'immagine per il posizionamento del punto *(V)xy*. *b)* Modello dello schema prospettico.

Fig. 14/ Costruzioni grafiche per l'orientamento interno di una prospettiva a quadro verticale. Deneux H., 1930, p. 26.

Le relazioni spaziali fra gli enti introdotti si comprendono più facilmente nello spazio. In questa sede, è stata proposta la soluzione sul piano e la successiva traduzione tridimensionale, ma nulla vieta di procedere direttamente nello spazio. La soluzione dell'orientamento interno di foto assimilabili a prospettive verticali si avvale spesso delle costruzioni fin qui proposte. Lo stesso Deneux ne suggerisce l'uso e ne illustra la procedura (fig. 14).
La scelta di richiamare le costruzioni grafiche sul piano dell'immagine, parallelamente alla rappresentazione tridimensionale degli schemi prospettici, mira a mantenere un legame con la tradizione disciplinare degli studi sulla prospettiva, che hanno sempre risolto sul piano del quadro le relazioni tra gli enti posti nello spazio e la loro proiezione prospettica.

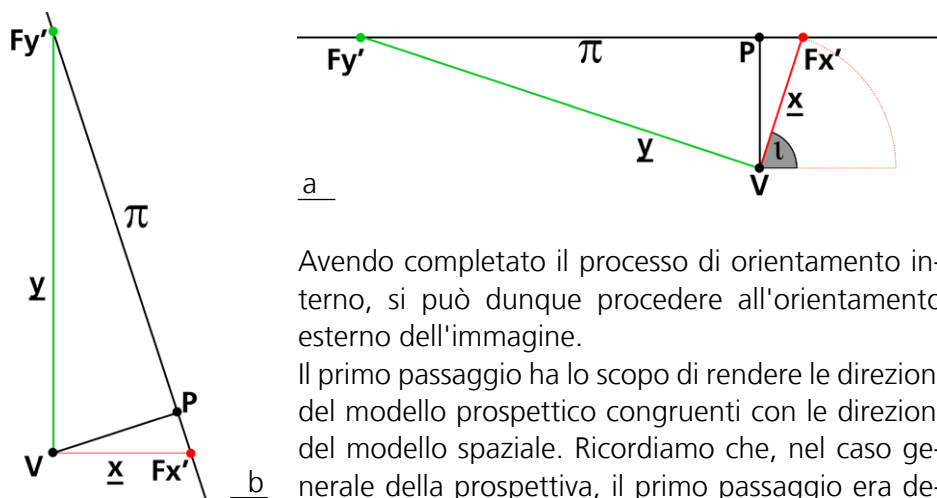



Fig. 15/ *a)* Misura, in vista superiore, dell'angolo ι che assegna alla retta x la direzione dell'asse x. *b)* Orientamento del modello prospettico a seguito della rotazione. Vista superiore.

Avendo completato il processo di orientamento interno, si può dunque procedere all'orientamento esterno dell'immagine.

Il primo passaggio ha lo scopo di rendere le direzioni del modello prospettico congruenti con le direzioni del modello spaziale. Ricordiamo che, nel caso generale della prospettiva, il primo passaggio era dedicato ad assegnare direzione verticale alla retta $\underline{z}$.

In questo caso, avendo operato in vista frontale su uno schema prospettico a quadro verticale, la retta $\underline{z}$ è già parallela all'asse *z* del modello. Si va subito, dunque, al secondo passaggio, ovvero alla rotazione dello schema prospettico intorno alla retta $\underline{z}$, con angolo ι tale da conferire alla retta $\underline{x}$ la direzione dell'asse *x* del modello (fig. 15).

Si continua dunque, come già visto, applicando la regola del parallelogramma con l'ausilio di un segmento di lunghezza nota. La lunghezza del segmento $\overline{AB}$ viene dunque riportata su $\underline{x}$ a partire da *V*; dall'estremo *W* si conduce una retta parallela alla retta proiettante che passa per *A*'; questa retta interseca la retta che passa per *B*' determinando la posizione di *B*. L'ultimo passaggio consiste nel traslare il segmento $\overline{AB}$ così trovato, fino a farlo coincidere con il segmento $\overline{AB}$ del modello (fig. 16). Lo schema prospettico è dunque orientato nello spazio del modello e rende visibile la posizione dalla quale è stata scattata la fotografia. Al fine di verificare l'attendibilità dei processi fin qui eseguiti, sono state tracciate rette proiettanti passanti per due punti *D* ed *E* del modello e si è determinata l'intersezione tra queste rette e il piano dell'immagine.

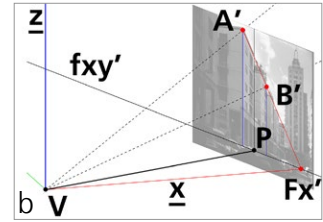
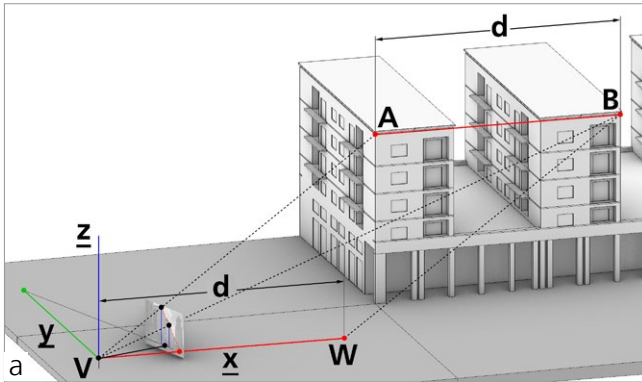



Fig. 16/ *a)* Regola del parallelogramma e posizionamento dello schema prospettico nello spazio del modello. *b)* Rette proiettanti che passano per le proiezioni degli estremi del segmento $\overline{AB}$.

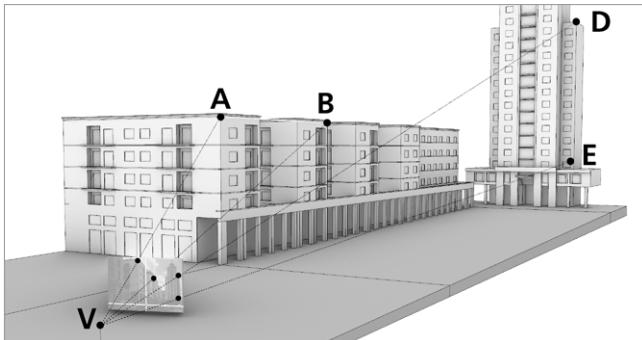



Fig. 17/ Verifica della congruenza proiettiva fra immagine e modello mediante il tracciamento di ulteriori rette proiettanti.

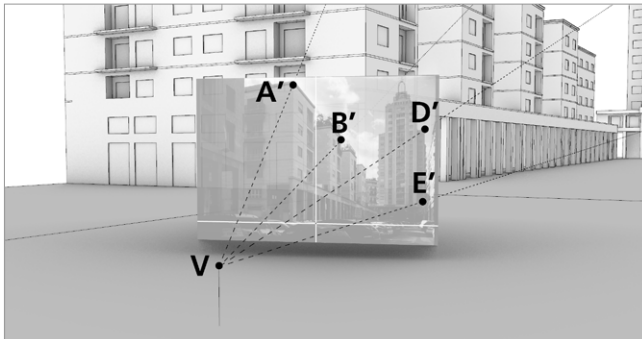



Fig. 18/ Vista di dettaglio dell'immagine.

La verifica ha dato esito positivo, mostrando scarti inferiori ai 5 cm (figg. 17-18). Al fine di illustrare la relazione fra il decentramento e la posizione della *fxy*' nell'immagine, il modello del banco ottico mostrato nelle pagine che precedono è stato utilizzato per ricostruire la proiezione che ha dato origine alla fotografia utilizzata.

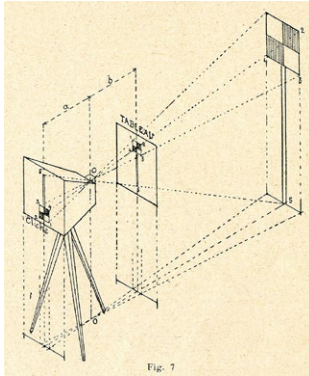



Fig. 19/ Schema illustrativo dell'inversione dell'immagine fotografica. Deneux H., 1930, p. 7.

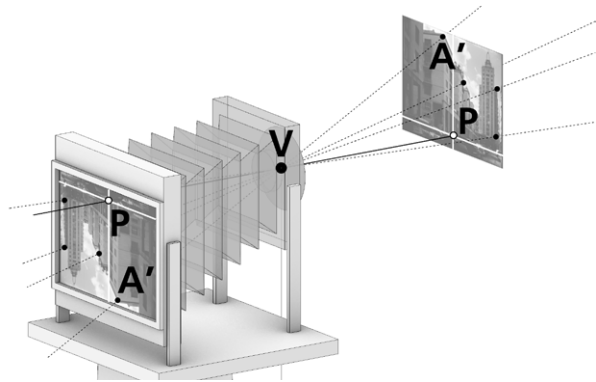



Fig. 20/ Simulazione dell'inversione dell'immagine fotografica.

Fig. 21/ Vista di profilo della camera e del decentramento verticale dell'obiettivo.

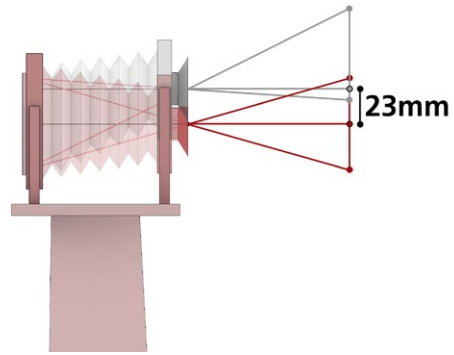



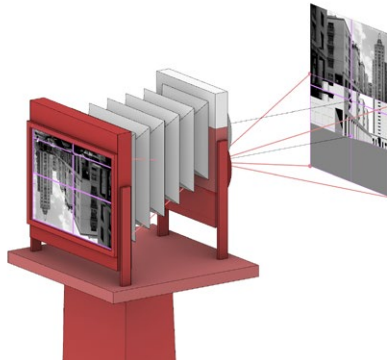
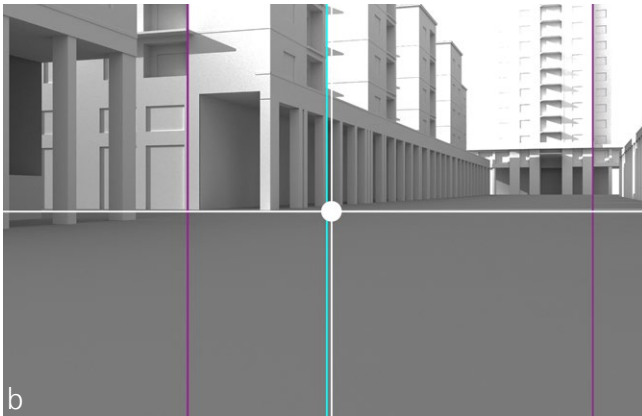
Fig. 22/ Simulazione di una fotografia senza decentramento dallo stesso punto di presa. In rosso l'obiettivo privo di decentramento.

L'inversione dell'immagine sul piano della pellicola (fig. 19) è efficacemente illustrata dalla fotografia del vetro smerigliato della camera da studio (fig. 7). L'immagine viene qui ricostruita per far comprendere l'utilità e gli effetti del decentramento verticale.

Fig. 23/ Misura del decentramento rispetto al punto baricentrico dell'immagine e confronto con la simulazione della ripresa senza decentramento. In bianco la posizione del punto principale. *a)* Nella fotografia, di dimensioni 6 x 9 cm, la linea d'orizzonte si trova 2,3 cm più in basso del centro geometrico dell'immagine. Si nota anche un minimo decentramento orizzontale, pari a 0,7 mm. *b)* L'immagini simulata differisce per l'annullamento del solo decentramento verticale; le rette verticali della fotografia sono pertanto allineate con quelle della vista del modello.

La traslazione dell'obiettivo sposta verso l'alto la linea d'orizzonte, ma questo spostamento, sull'immagine rovesciata, equivale a uno spostamento verso il basso (fig. 20).
L'entità della traslazione, misurata lungo l'asse verticale dell'immagine dalla distanza fra il baricentro e il punto principale (fig. 21), è pari a 2,3 cm (l'immagine ha dimensioni 6 x 9 cm). Al fine di valutare l'effetto del decentramento, è stata simulata un'immagine acquisita dallo stesso punto di presa con obiettivo non decentrato (fig. 22).
Il confronto mette in evidenza la riduzione del piano di campagna a vantaggio degli alzati (fig. 23), "*pour réduire en même temps, l'importance du terrain.*[8]"

8 Deneux H., 1934, p. 64.

Fig. 24/ Fotografia della corte aperta, 1962. Fonte: Archivio Alinari, Inventario ACA-F-055431-0000, Titolo: "Veduta del grattacielo dell'I.N.A. a Palermo", Fotografo: Fratelli Alinari. La scheda tecnica indica che il supporto su cui è impressa l'immagine è una lastra di vetro di formato 21 x 27 cm.

Dall'archivio Alinari

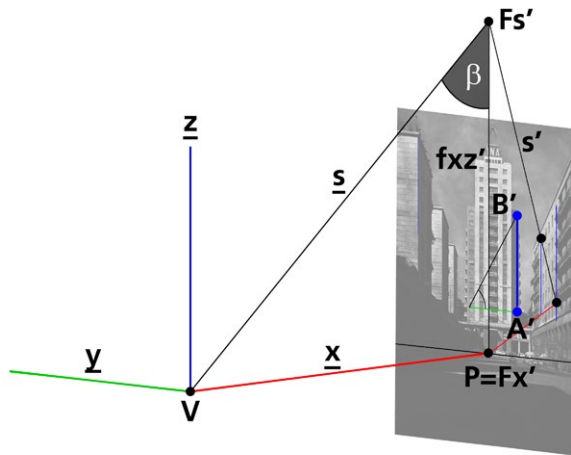
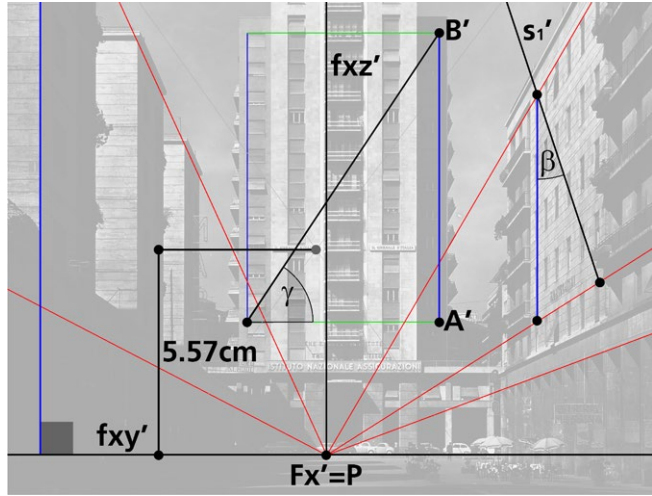
Il processo illustrato nelle pagine che precedono è stato applicato a un'immagine della corte, acquisita dai fratelli Alinari negli anni '60 dello scorso secolo, poco dopo il termine dei lavori di costruzione del complesso. La foto è ripresa dal lato breve della corte aperta, opposto al 'grattacielo', a sottolineare ancora una volta l'impostazione prospettica del progetto.
Il fotografo ha utilizzato un banco ottico con una lastra fotografica di grande formato, orientata in senso verticale (fig. 24) e ha controllato con cura il posizionamento della camera e i decentramenti necessari a rendere il quadro verticale e parallelo alla facciata del grattacielo, ossia al piano *yz* del nostro sistema di riferimento. Così facendo, sia le rette verticali che quelle parallele all'asse *y* risultano parallele tra loro nella prospettiva fotografica.

Fig. 25/ Misura degli angoli β e γ sui fronti della corte rispettivamente paralleli ai piani *xz* e *yz* del sistema di riferimento del modello.

Fig. 26/ Costruzione grafica dell'orientamento interno tramite ribaltamenti sul piano dell'immagine.

Fig. 27/ Misura dell'angolo γ sull'immagine per verificarne la congruenza con il corrispondente angolo misurato sul modello. La distanza tra il centro geometrico dell'immagine e la *fxy'* misura il decentramento verticale, pari a 5,57 cm. Anche in questo caso si riconosce la presenza di un piccolo decentramento orizzontale.

In tale condizione, l'asse x del nostro sistema di riferimento è ortogonale al quadro e coincide con l'asse di presa; *Fx*' appartiene alla *fxy*' e coincide con il punto principale *P*. L'immagine è stata ruotata per conferire direzione verticale alle prospettive delle rette verticali; si è dunque verificata l'orizzontalità delle rette parallele all'asse *y*. Trovato il punto di fuga *Fx*'=*P*, si traccia per questo punto la *fxy*', con direzione orizzontale.
Per il calcolo dell'orientamento interno è stata utilizzata una retta s_1 che appartiene alla facciata opposta a quella degli edifici precedentemente analizzati, avente giacitura <u>*xz*</u>. Il punto di fuga *Fs*' si troverà, anche questa volta, sulla *fxz*', ossia sulla retta verticale che passa per *Fx*'=*P*. Sul modello, costruito sulla nuvola di punti acquisita con laser scanner, la retta s_1 forma con la direzione della verticale un angolo β (fig. 25). La retta *(s)xz*, che passa per *Fs*' e forma con la *fxz*' un angolo β, intersecherà la *fxy*' in *(V)xz*. La distanza fra i punti *(V)xz* e *P* è la lunghezza focale dell'obiettivo (fig. 26). Prima di procedere all'orientamento esterno, si è verificata la congruenza fra il triangolo rettangolo che ha vertici sulla facciata del grattacielo, un cateto parallelo a *y* e uno parallelo a *z*; l'ipotenusa del triangolo forma con il lato orizzontale un angolo γ (fig. 25).

Fig. 28/ Ricostruzione tridimensionale dello schema prospettico.

L'immagine fotografica, come atteso, restituisce una dimensione dell'angolo molto vicina a quella misurata sul modello[9] (fig. 27).

Il modello prospettico è dunque ricostruito: il punto *V* si troverà sulla retta ortogonale al piano dell'immagine, passante per *P*, a una distanza pari al segmento dato dai punti *(V)xz* e *P* (fig. 28).

Il primo passaggio dell'orientamento esterno è la rotazione dello schema prospettico intorno alla retta *z*, di ampiezza tale da assegnare alla retta *x* la

9 La differenza tra i due angoli, misurati in gradi sessadecimali, appare nella seconda cifra dopo la virgola.

Fig. 29/ Dimensionamento con la regola del parallelogramma e posizionamento dello schema prospettico nel modello della corte aperta.

Fig. 30/Verifica visiva della congruenza fra l'immagine fotografica e la vista prospettica del modello dal punto *V* con lunghezza focale $\overline{VP}$.

direzione dell'asse *x* del sistema di riferimento del modello. Per il dimensionamento dello schema prospettico è stata applicata ancora una volta la regola del parallelogramma.

Il segmento scelto è il cateto verticale $\overline{AB}$ del triangolo rettangolo appena esaminato.
Si è dunque proceduto a tracciare, per i punti *A*' e *B*' dell'immagine fotografica, due rette proiettanti; a partire da *V*, sulla retta $\underline{z}$, è stato riportato un segmento $\overline{VW}$ di lunghezza pari ad $\overline{AB}$.
Per il punto *W* è stata condotta una retta parallela alla retta proiettante che passa per *A*'.
Questa retta interseca in *B* la retta proiettante che passa per *B*'; la retta di direzione $\underline{z}$, che passa per *B*, interseca in *A* la retta proiettante che passa per *A*'.
Il modello prospettico viene infine traslato posizionando il segmento $\overline{AB}$ nel modello (fig. 29).
Si procede infine a verificare la congruenza fra l'immagine fotografica e la proiezione prospettica del modello dal punto *V* (fig. 30).

5
Ricostruzioni

I capitoli precedenti hanno mostrato che le tecnologie digitali per il disegno e la modellazione rendono più semplice e accurata la ricostruzione dello schema prospettico di un'immagine fotografica, il suo dimensionamento e la ricostruzione della sua posizione nel modello della scena raffigurata nell'immagine, costruito a partire da un rilievo.
Il disegno digitale permette di rintracciare anche i punti di fuga più distanti e di superare il vincolo fra dimensione dell'immagine e dimensione dello spazio di lavoro.
Si comprende facilmente che, operando con gli strumenti di disegno tradizionali, a ogni ingrandimento dell'immagine fotografica, utile ad apprezzarne meglio i dettagli, corrispondeva un pari ingrandimento dello schema prospettico e un conseguente allontanamento dei punti di fuga, che potevano superare facilmente i confini del tavolo da disegno e la lunghezza delle righe utilizzate.

Ma la vera rivoluzione operata dagli strumenti digitali non riguarda soltanto le operazioni sul piano, ma anche la possibilità di lavorare in uno spazio tridimensionale. Abbiamo visto che anche le fasi di orientamento interno possono essere condotte nello spazio tridimensionale, benché in questa sede si sia scelto di continuare a operare sul piano dell'immagine.
Nella fase di orientamento esterno, lo schema prospettico è stato ricostruito nello spazio e l'intero processo di dimensionamento e posizionamento è stato condotto in viste tridimensionali.
Il passaggio successivo è la restituzione prospettica, che viene condotta direttamente ed esclusivamente nello spazio.
La differenza rispetto al passato è ancora più marcata di quanto non avvenga per i processi di orientamento interno: con gli strumenti tradizionali del disegno, la restituzione prospettica poteva condurre alla restituzione di proiezioni ortografiche, prevalentemente piante e prospetti, del soggetto fotografato, attraverso operazioni di ribaltamento sul quadro.
La possibilità di operare nello spazio virtuale del software di rappresentazione digitale permette invece di ricostruire modelli digitali dalle immagini fotografiche, come già mostrato da Migliari[1].
Fino a ora abbiamo lavorato su un caso studio esistente, scelto per la semplicità del suo assetto spaziale. Quando si utilizza la restituzione prospettica da immagini fotografiche, invece, si lavora quasi sempre su immagini che raffigurano una scena diversa da quella attuale.
Abbiamo chiarito più volte, infatti, che la restituzione prospettica non può essere considerata un'alternativa ai metodi di rilevamento, ma solo un modo per ricostruire, con discreto margine di approssimazione, edifici e scenari urbani modificati o non più esistenti.

1 Migliari et al., 2013.

È dunque necessario illustrare le strategie per l'orientamento interno ed esterno di immagini che raffigurano assetti spaziali profondamente diversi dalla configurazione attuale dei luoghi.
Per questa ragione, nel corso della trattazione di questo capitolo, dedicato alle ricostruzioni, saranno illustrati i processi che hanno condotto all'orientamento interno ed esterno di alcune immagini.
Il primo paragrafo assume nuovamente il caso studio fin qui utilizzato, per introdurre, ancora una volta su un soggetto semplice, le strategie più elementari del processo di ricostruzione tridimensionale.
Si passerà dunque alla descrizione di alcune esperienze di studio e di ricerca, per mostrare i percorsi seguiti e gli esiti prodotti.

Fig. 1/ Posizionamento dell'immagine sul modello della corte aperta utilizzando la regola del parallelogramma, nota la lunghezza del segmento $\overline{AB}$.

Disegnare nello spazio

Per illustrare i processi più elementari per la ricostruzione tridimensionale, riprendiamo in considerazione la fotografia del caso studio utilizzata nella prima parte del capitolo precedente.
Fingeremo che piazzale Ungheria sia del tutto scomparso, che nessuno degli edifici che lo compongono sia rimasto *in situ* e che l'unica informazione dimensionale a noi pervenuta sia la dimensione $\overline{AB}$, che abbiamo usato per applicare la regola del parallelogramma (fig. 1). Questa condizione si verifica alquanto spesso quando si lavora su fotografie d'epoca che ritraggono edifici e contesti urbani perduti, poiché, in molti casi, si riesce a caratterizzare dimensionalmente la ricostruzione solo grazie alla disponibilità di cartografie storiche che rappresentano, ad esempio, l'ampiezza di una facciata. Ai fini della nostra simulazione, ipotizzeremo dunque che il nostro spazio tridimensionale virtuale sia popolato da due soli elementi: lo schema prospettico definito a seguito del processo di orientamento interno, e la misura di un segmento $\overline{AB}$, che appartiene a

Fig. 2/ *a)* Regola del parallelogramma con il segmento $\overline{AB}$ sulla retta x_1; *b)* verifica della congruenza proiettiva fra la retta x_1 e la sua proiezione x_1'.

Fig. 3/ *a)* Tracciamento sul quadro π della retta z_1', che fuga in *Fz'* e passa per *A'*. *b)* La retta z_1, che passa per *A* e ha la direzione di $\underline{z}$, appartiene al piano proiettante che passa per *V* e z_1'.

una retta x_1, parallela all'asse *x* del nostro sistema di riferimento (fig. 2). I software di disegno e modellazione permettono di configurare, nello spazio virtuale tridimensionale, un piano al quale vengono riferite le operazioni di disegno[2]. Se il piano prescelto è quello dell'immagine fotografica, le operazioni di disegno produrranno enti geometrici che appartengono a quel piano.

2 Questo piano assume nomi diversi. Ad esempio: UCS, *User Coordinate System*, in Autocad; Piano C, ovvero Piano di Costruzione, in Rhinoceros.

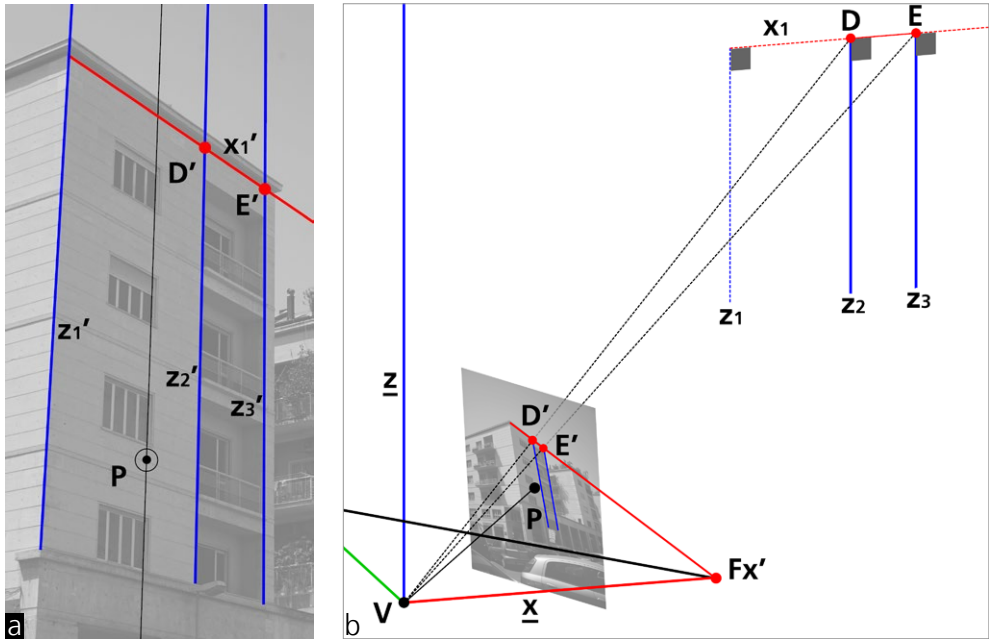
Fig. 4/ *a)* Tracciamento, sull'immagine, delle rette z_2' e z_3' che delimitano l'apertura delle logge sul prospetto. Le rette intersecano la retta x_1' nei punti *D*' ed *E*'. *b)* Determinazione dei punti *D* ed *E*. Tracciamento delle rette verticali z_2 e z_3.

Impostato dunque il piano di riferimento sull'immagine, tracciamo una retta z_1' che passa per *A'* e fuga in *Fz*'. Se tracciamo per il punto *A*, nello spazio, una retta verticale z_1 e costruiamo il piano proiettante che passa per *V* e per z_1, questo piano, come atteso, interseca il piano dell'immagine (il quadro π) in z_1'. Risulta evidente che il processo può seguire il percorso inverso: data la retta z_1' sull'immagine fotografica, la retta z_1 nello spazio apparterrà al piano proiettante che passa per z_1' (fig. 3). Per illustrare il procedimento di ricostruzione che utilizza piani e rette proiettanti, eseguiamo la restituzione di una delle logge presenti sul prospetto rivolto verso la corta aperta. Per disegnare le rette verticali che delimitano le logge ai diversi livelli, tracciamo sull'immagine due ulteriori rette verticali z_2' e z_3', che intersecano la retta x_1' nei punti *D*' ed *E*' (fig. 4a).
Le rette proiettanti che passano per *D*' ed *E*' intersecano la retta x_1 nei punti *D* ed *E*; per questi punti vengono tracciate le rette verticali z_2 e z_3 (fig. 4b).

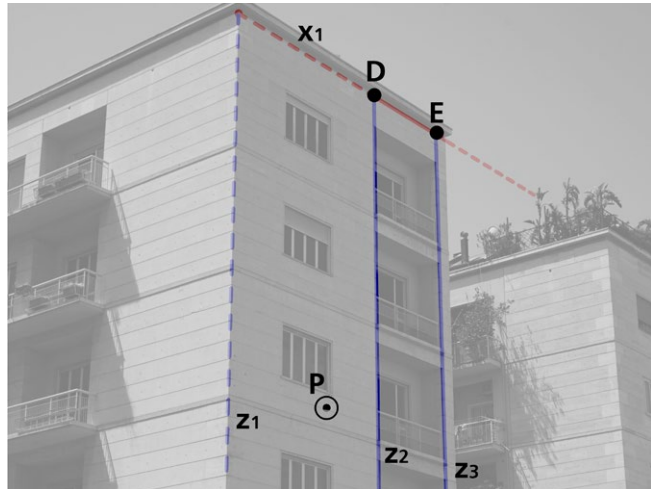
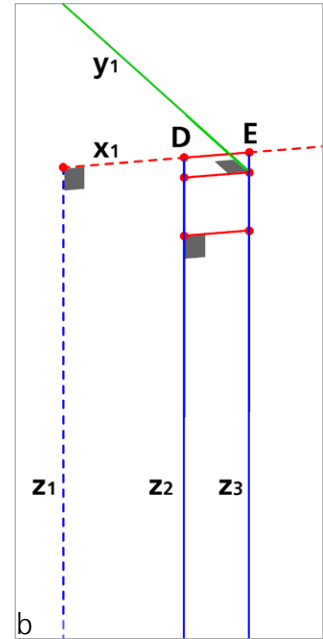
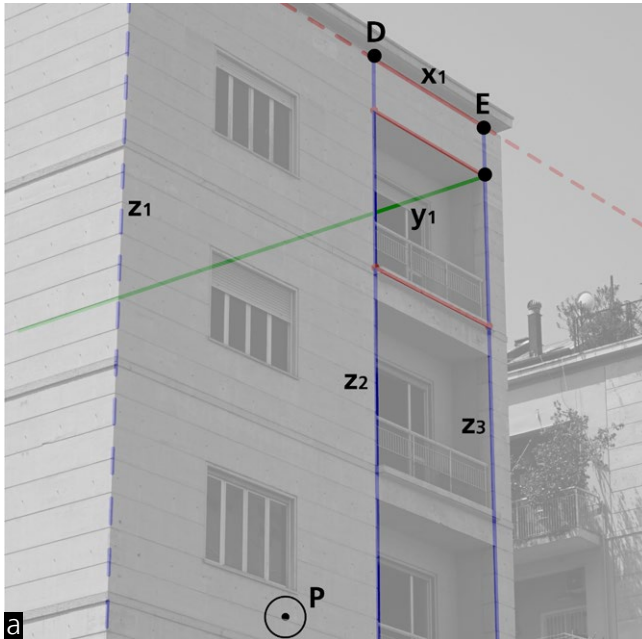
Fig. 5/ Vista ‘vincolata’ dal punto *V*. Si osservi la corrispondenza fra le rette restituite e la loro immagine prospettica.

Le procedure fin qui descritte hanno evidenziato le potenzialità dell’uso di strumenti digitali per la restituzione prospettica, specialmente se confrontate con le procedure che utilizzavano ribaltamenti sul piano dell'immagine. Gli strumenti digitali permettono anche di condurre la restituzione in altro modo, disegnando e modellando direttamente nella scena, osservata dal punto di vista della prospettiva. Questo approccio non costituisce una novità, poiché la modellazione condotta in vista ‘vincolata’, ossia dal punto di vista dell'immagine, è una caratteristica peculiare dei software per la restituzione prospettica assistita, presentati nel primo capitolo. Si ritiene utile, tuttavia, presentare i due approcci contemporaneamente, per non restare vincolati all'automatismo dei sistemi di modellazione assistita, che assegnano un ruolo secondario alla verifica dimensionale e morfologica e, soprattutto, non sfruttano a pieno le potenzialità della rappresentazione nello spazio tridimensionale. Procediamo, dunque, con l'impostazione di una vista prospettica 'vincolata', che ha centro nel punto *V* e distanza principale $\overline{VP}$.
In chiusura del capitolo precedente, questa vista è stata utilizzata per la verifica visiva della congruenza

Fig. 6/ *a)* Vista prospettica 'vincolata' da *V*, utilizzata per la duplicazione e la traslazione della retta x_1. *b)* Vista assonometrica delle rette nello spazio.

fra l'immagine fotografica e la proiezione prospettica del modello. Nelle immagini, le rette disegnate sull'immagine sono state nascoste e le rette generate nello spazio sono state tratteggiate, ad eccezione del segmento $\overline{DE}$ e delle rette z_2 e z_3. Per permettere la vista delle rette ricostruite nello spazio, che si trovano al di là dell'immagine rispetto a *V*[3], è stato attribuito un coefficiente di trasparenza all'immagine fotografica (fig. 5). Le rette finora restituite, viste da *V*, si sovrappongono alla loro immagine fotografica; ciò permette di continuare il processo di restituzione nello spazio, operando sul modello. Adottiamo, come riferimento per le operazioni di disegno, il piano individuato dalle rette x_1 e z_1; duplichiamo il segmento $\overline{DE}$ traslandolo verso il basso lungo le rette z_2 e z_3, finché la sua immagine si sovrapporrà all'immagine fotografica del limite inferiore della loggia.
Scegliamo adesso il piano orizzontale come piano di costruzione e disegniamo, per lo spigolo superiore della loggia, una retta y_1 (fig. 6).

[3] Ricordiamo che qualsiasi ingrandimento o riduzione dello schema prospettico tridimensionale (e dell'immagine fotografica con esso), che assuma V come punto di riferimento, non produce alcuna variazione della relazione proiettiva fra immagine e rette nello spazio. Ingrandendo lo schema prospettico, le rette nello spazio potrebbero anche trovarsi fra V e l'immagine.

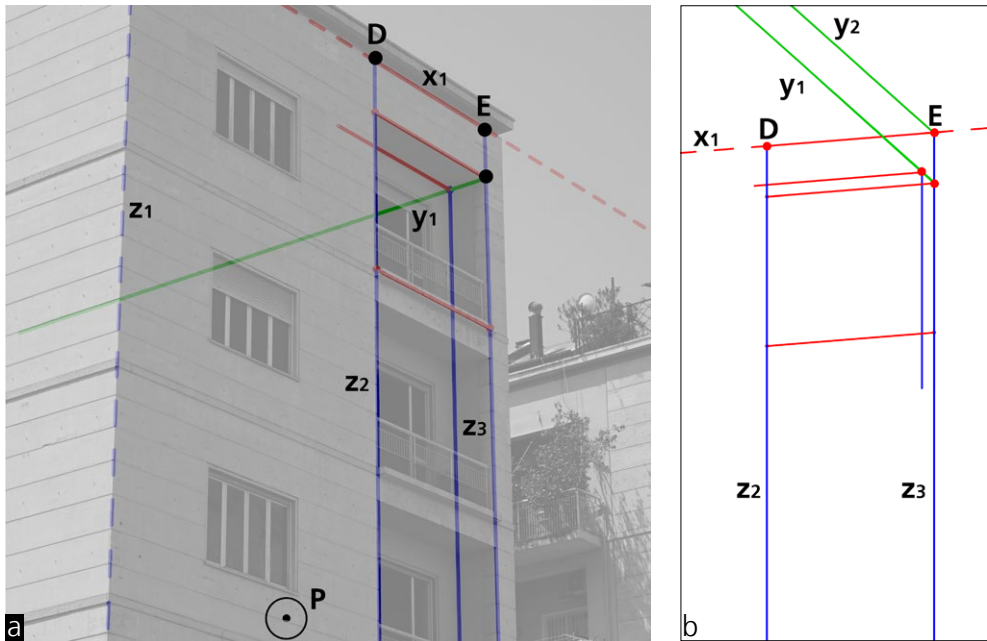



Fig. 7/ a) Vista prospettica 'vincolata' dal punto *V*. Duplicazione e traslazione di rette per la ricostruzione dello spazio interno della loggia. b) Vista assonometrica del modello con la posizione delle linee ricavata dalla vista vincolata.

Abbiamo eseguito queste operazioni operando nello spazio e controllando in vista vincolata $\overline{VP}$ e, infine, abbiamo verificato quanto ottenuto in una vista generica del modello. Si procede traslando una copia della retta z_3 lungo la retta y_1 del modello, fin quando essa appare sovrapporsi all'immagine fotografica dallo spigolo verticale di fondo della loggia; per il vertice così trovato, si conduce una retta parallela all'asse *x* (fig. 7). Le rette fin qui tracciate definiscono il limite del parallelepipedo che corrisponde allo spazio della loggia.

La sovrapposizione tra l'immagine fotografica e l'esito degli interventi eseguiti nello spazio, osservati prospetticamente dal centro di proiezione *V* conferma la coerenza proiettiva fra il modello e l'immagine fotografica. Si può dunque procedere a costruirne il modello (fig. 8).

Se impostiamo nuovamente il piano di lavoro sulla facciata dell'edificio (piano *xz*), possiamo traslare verso il basso una o più copie del modello della log-

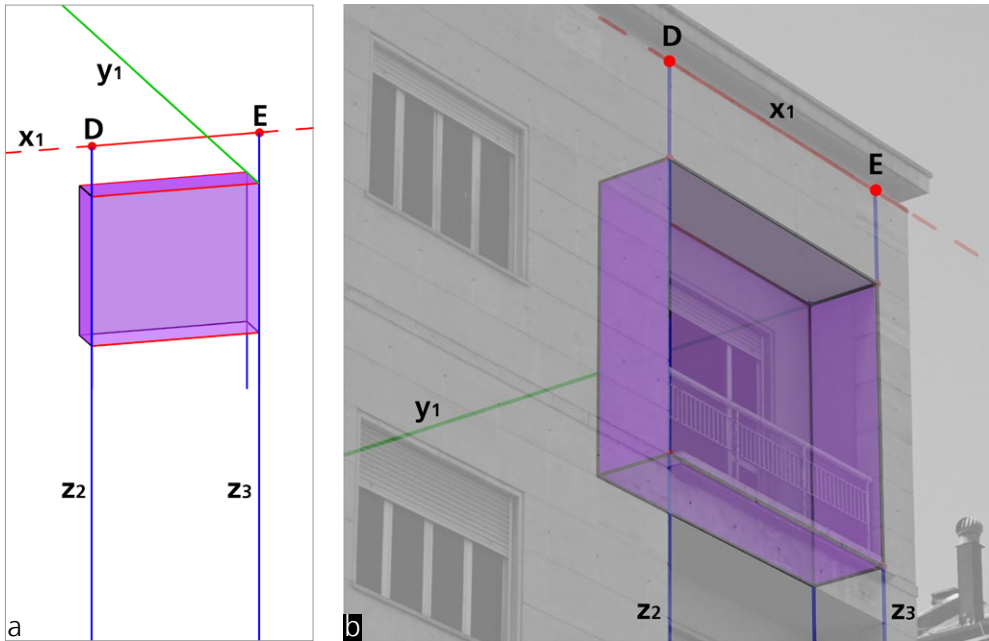



Fig. 8/ *a)* Modello digitale della loggia, realizzato in una vista generica dello spazio virtuale. *b)* Verifica della congruenza proiettiva fra immagine e modello in vista vincolata.

Fig. 9/ Duplicazione e traslazione verso il basso del modello della loggia, eseguito nella vista vincolata.

gia, fin quando tali modelli, visti da *V*, non si sovrappongono correttamente all'immagine fotografica delle logge dei piani sottostanti (fig. 9).

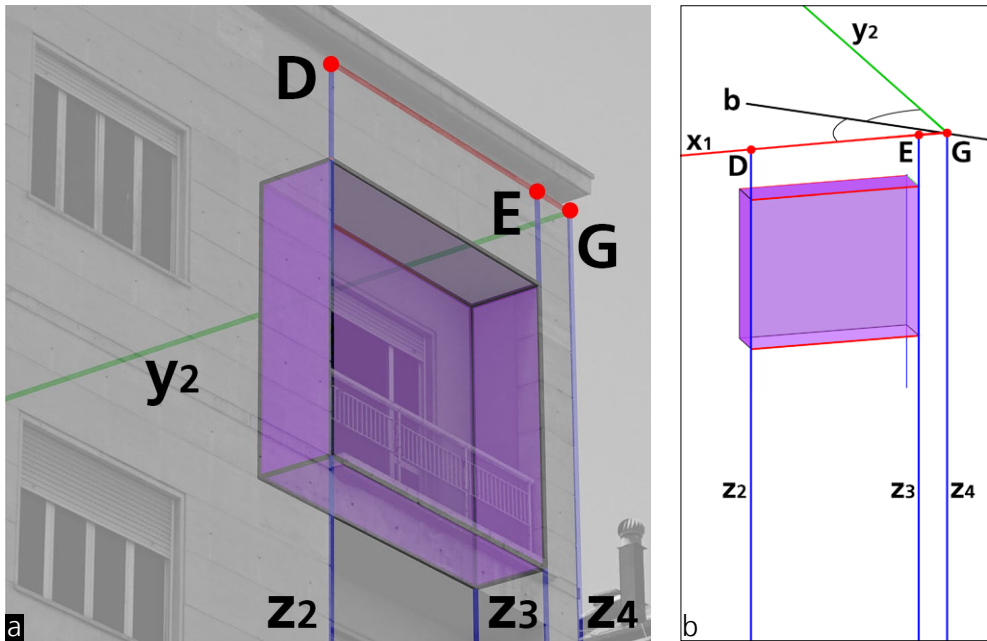
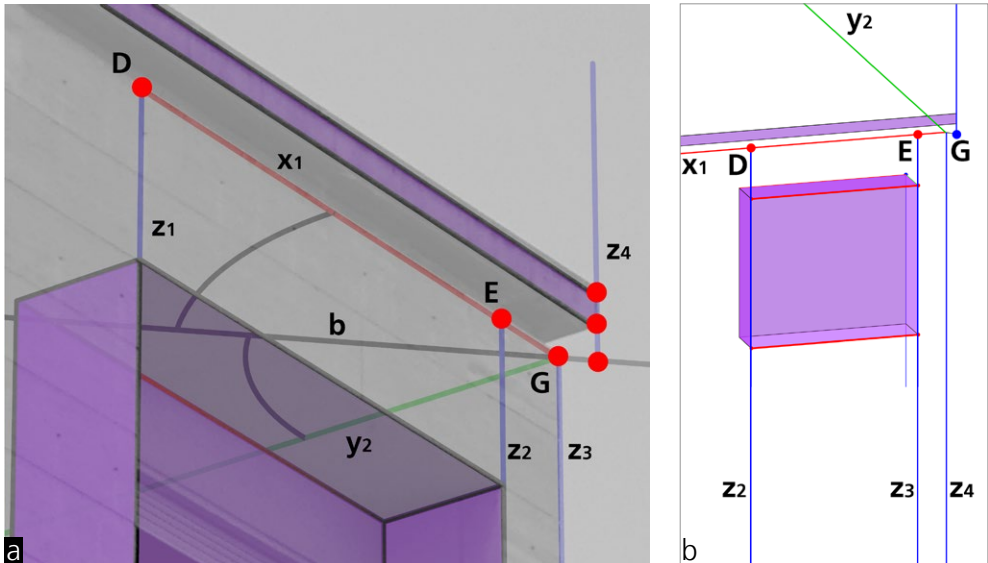



Fig. 10/ *a)* Nella vista vincolata, duplicazione e traslazione lungo x_1 della retta z_3 in z_4, e individuazione del punto *G*. *b)* In vista assonometrica, costruzione della retta y_2 che passa per *G*, e della retta *b*, bisettrice dell'angolo retto in *G*.

Si è visto che la costruzione degli enti geometrici viene eseguita tenendo sempre in debita considerazione il piano di lavoro e le relazioni di appartenenza.
Quando il tracciamento degli enti geometrici viene eseguito sulla vista vincolata, la coerenza fra gli enti restituiti viene verificata in una vista generica.
Viceversa, come in quest'ultimo caso, le rette di fondo e il modello sono stati costruiti nella vista generica e la loro posizione è stata verificata nella vista vincolata. Il processo di duplicazione, laddove siano presenti elementi identici, rende più rapido il processo di ricostruzione.
Passiamo adesso alla cornice sommitale del corpo di fabbrica. Si tratta di un volume parallelepipedo sopraelevato rispetto al limite superiore della facciata e aggettante rispetto al piano individuato da questa. Il processo di ricostruzione usa entrambe le modalità di lavoro finora introdotte: la modellazione da una vista generica della scena virtuale e quella dalla vista vincolata al centro di proiezione.

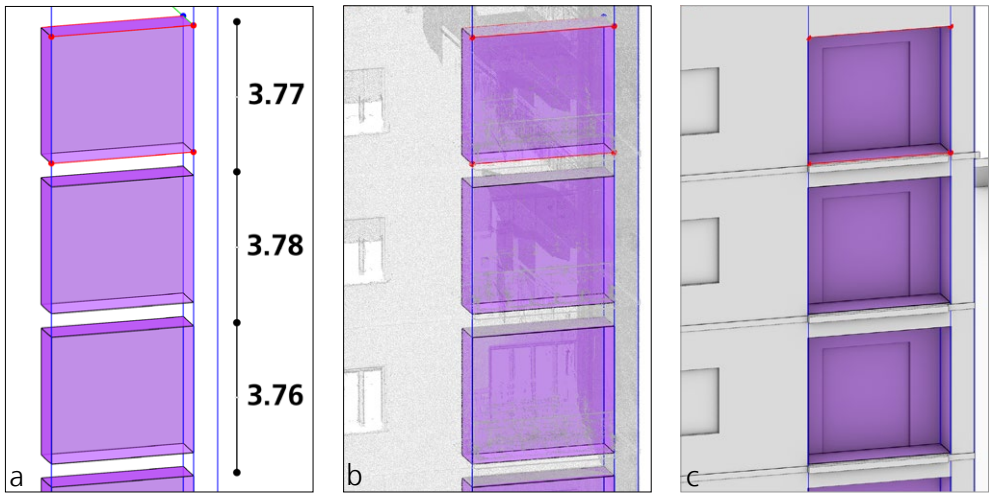
Fig. 11/ *a)* In vista vincolata, duplicazione e trascinamento di una retta verticale in z_4, tramite scorrimento sulla retta *b*; tracciamento di due rette orizzontali sul bordo superiore e inferiore della cornice. *b)* Modello della fascia verticale della cornice.

Nella vista vincolata posizioniamo nello spazio una retta verticale z_3, copiando e traslando la retta z_2 lungo x_1 fino a che la sua immagine non si sovrappone a quella dell'estremità destra della facciata; *G* è il punto di intersezione fra la z_3 e la x_1 (fig. 10a).
Nella vista libera del modello, tracciamo per il punto *G* una retta *b*, bisettrice dell'angolo in *G* formato dalla x_1 e da una retta y_2 (fig. 10b). Nella vista vincolata duplichiamo una retta verticale creando una retta z_4; utilizzando lo snap di prossimità, (vicino, *near*) agganciamo un estremo di questa retta a un generico punto della retta *b*; trasliamo infine z_4 mantenendo la sua estremità agganciata alla retta *b*, fin quando la sua proiezione non coincide con l'immagine dello spigolo estremo della cornice (fig. 11a).
Ancora nella vista vincolata, posizioniamo nello spazio due copie della x_1 ai margini orizzontali superiore e inferiore della cornice.
Possiamo dunque tornare nella vista libera e modellare la faccia verticale della cornice (fig. 11b), la cui proiezione, come prevedibile, coinciderà con la sua immagine fotografica (fig. 11a).

È importante soffermarsi su questa duplice modalità di disegno e modellazione, al fine di evitare il rischio che l'operazione di restituzione si trasformi in un sofisticato 'ricalco' dell'immagine fotografica.
La restituzione deve sempre tenere in conto che il progetto di architettura, nella maggior parte degli esempi, soprattutto se relativi ad una architettura storica, obbediva a regole precise nella disposizione delle parti, e che lo scopo delle attività di ricostruzione, come delle attività di rilievo, è innanzitutto la ricerca delle regole che strutturano la morfologia di una fabbrica.

> (…) ha senso rilevare un edificio fuori da un'operazione di restauro, o da qualsiasi altra attività che l'abbia richiesto? Secondo me sì, perché il rilievo d'architettura ha una finalità sua propria che è la conoscenza (…) il rilievo di architettura è la ricostruzione del progetto dell'opera studiata (…) Dunque il rilievo non è il frutto di una certa attività di studio, ma è quell'attività[4].

Abbiamo più volte ribadito che la restituzione prospettica, anche con la maggiore accuratezza consentita dalla rappresentazione digitale, non può in nessun modo considerarsi uno strumento di rilievo, perché il confronto con la precisione e il dettaglio dei simulacri digitali (nuvole di punti), generati dagli strumenti hardware e software oggi disponibili, sarebbe impietoso. Purtuttavia, la restituzione prospettica può contribuire, se condotta *cum grano salis*, alla ricostruzione delle regole del comporre e dei rapporti dimensionali di molti edifici non più esistenti, dei quali si è conservata solo qualche fotografia. Con riferimento alle logge del caso studio, osserviamo che non basta aver posizionato le copie sulla vista vincolata, perché abbiamo anche il dovere di verificare se la distanza di interpiano sia costante o no. Solo a queste condizioni potremmo dire di aver eseguito una ricostruzione dell'opera.

4 Migliari R. "Principi teorici e prime acquisizioni nel rilievo del Colosseo". In *Disegnare. Idee, immagini*, nn. 18-19, p. 33.

Fig. 12/ *a)* Vista assonometrica del modello della logge con misura degli interpiani. *b)* Verifica visiva della congruenza tra il modello delle logge e la nuvola di punti acquisita con laser scanner. *c)* Sovrapposizione con il modello della corte costruito sulla nuvola di punti.

L'esempio della loggia è molto semplice, ma risulta ugualmente utile, perché richiama l'attenzione su una parte consistente e necessaria del processo di ricostruzione.
Si considerino, ad esempio, la simmetria della facciata di una chiesa barocca rispetto al portale di ingresso, la teoria di aperture sul fronte di un palazzo e l'allineamento sugli assi verticali di finestre poste a livelli successivi. Queste informazioni geometriche, ma anche compositive, potranno essere individuate o verificate attraverso una procedura di restituzione prospettica, che, forse, non potrà dirci se la facciata della chiesa avesse un leggero fuori piombo; potrà però dirci molto sulle sue dimensioni generali e sui suoi rapporti proporzionali.
La verifica sulle logge (fig. 12a) mostra che l'interpiano subisce leggere variazioni, che al fine della ricostruzione del progetto dell'opera, possono essere ricondotte al valore medio aritmetico.
Questa piccola porzione di restituzione è stata infine sovrapposta al modello della corte e alla nuvola di punti che ne ha guidato la costruzione, mostrando errori di sovrapposizione sempre inferiori ai 10 cm (fig. 12 b-c).

Restituzione da due immagini

Utilizziamo ancora il caso studio che ci ha accompagnati fin qui, per illustrare la combinazione di due fotografie per la ricostruzione prospettica.

Molto spesso accade, infatti, che l'edificio da ricostruire sia raffigurato in più di una fotografia e che la combinazione di più immagini possa arricchire l'esito della restituzione. Il processo di combinazione di due immagini è molto semplice: data una fotografia di cui siano stati ricostruiti l'orientamento interno ed esterno e sia stata prodotta una restituzione, basterà considerare un solo segmento visibile anche nella seconda fotografia[5] per eseguire il suo orientamento esterno.

Consideriamo, ad esempio, la possibilità di arricchire la restituzione dei primi due padiglioni del fronte lungo della corte, visibili nell'immagine fin qui utilizzata, aggiungendo due ulteriori padiglioni visibili nell'immagine acquisita con banco ottico. Anche il grattacielo è visibile in questa immagine, ma non potremo eseguirne la restituzione sulla base dei dati in nostro possesso.

È stato detto più volte che da una foto è possibile restituire la scena raffigurata in tre dimensioni. Si è finora omesso di dichiarare, e l'esempio del grattacielo ne offre lo spunto, che la restituzione prospettica di un insieme coerente di edifici non sempre è possibile.

Se infatti desideriamo rappresentare, in un unico scenario coerente, edifici che non sono collegati tra loro, ci accorgiamo che occorrono informazioni aggiuntive per l'orientamento esterno. Il grattacielo non è collegato ai quattro padiglioni né da un elemento fisico, né da una corrispondenza geometrica, come l'allineamento delle quote delle aperture sui fronti degli edifici; quest'ultima condizione sarebbe stata sufficiente a determinare l'intersezione fra rette appartenenti a un piano orizzontale.

5 Il segmento non deve appartenere a una retta verticale, perché , in tal caso, sarebbe possibile dare ai due modelli la stessa dimensione, ma risulterebbe impossibile dare un orientamento coerente agli assi *x* e *y*.

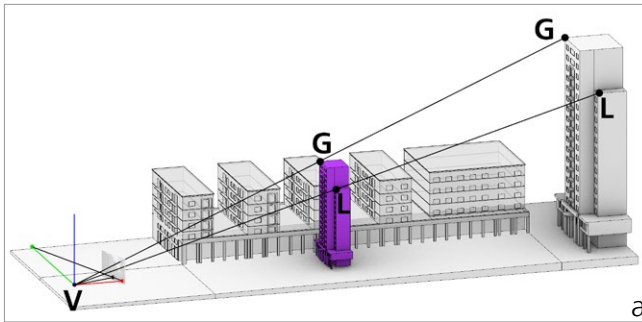



Fig. 13/ *a)* Modello della corte. In porpora è riconoscibile una copia del modello del grattacielo di dimensioni ridotte. La riduzione, pari al 50%, è stata eseguita assumendo come riferimento il punto *V*. *b)* Verifica della congruenza proiettiva fra l’immagine nella vista vincolata e i due modelli del grattacielo, che risultano perfettamente sovrapposti.

La restituzione di questo edificio potrà sempre essere realizzata, ma il modello che produrremo non sarà coerente con quello dei fronti (fig. 13).
La restituzione dei corpi di fabbrica sui due fronti della corte potrà risultare corretta solo in presenza di qualche dato aggiuntivo, ad esempio, come vedremo a breve, una cartografia che riporti le posizioni relative dei diversi edifici.
Torniamo dunque a esaminare la possibilità di restituire due ulteriori padiglioni del fronte utilizzando la fotografia acquisita con la camera da studio.
Dati i parametri di orientamento interno già determinati per via grafica nelle pagine precedenti, scegliamo un segmento orizzontale parallelo a *x*, di lunghezza $\overline{QR}$; individuiamo anche un segmento verticale che passa per Q e ha lunghezza $\overline{QS}$[6].

6 Non abbiamo dimenticato di aver già riferito entrambe le immagini a un segmento $\overline{AB}$, come mostrato nella fig. 16 del quarto capitolo e nella figura 41 del terzo capitolo. Scegliamo adesso un segmento diverso solo per mostrare la possibilità di misurare, in una foto già orientata, segmenti che permettono il collegamento a una seconda immagine.

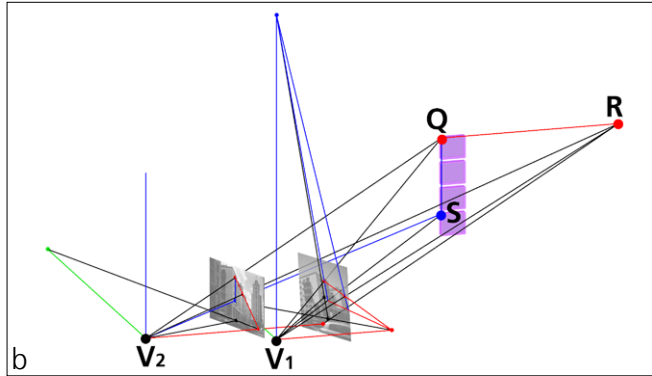
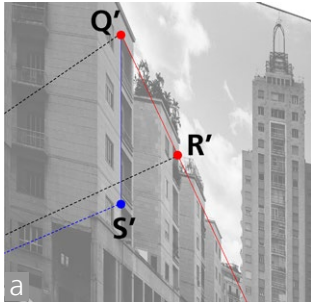
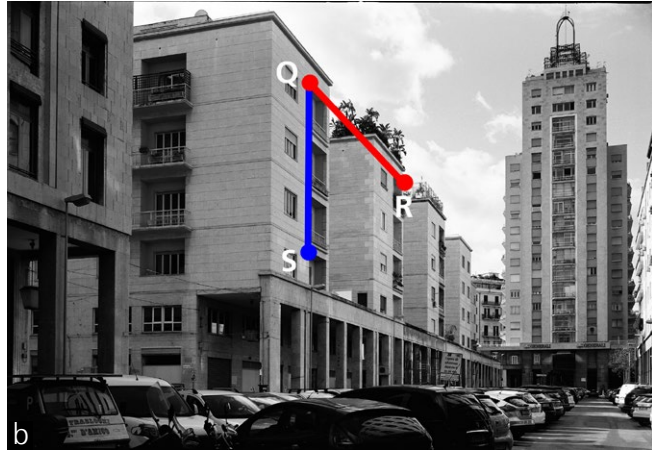



Fig. 14/ *a)* Individuazione, nell'immagine finora utilizzata, di un segmenti $\overline{QR}$ di lunghezza pari a 26,51 m e di un segmento $\overline{QS}$ di lunghezza pari a 11,26 m. *b)* I segmenti $\overline{QR}$ e $\overline{QS}$ nell'immagine acquisita con banco ottico.

Fig. 15/ *a)* Tracciamento della retta proiettante che passa per S' nella seconda immagine. *b)* Le due immagini orientate.

Questo secondo segmento potrà aiutarci a valutare la congruenza tra i due modelli prospettici.
Iniziamo dunque restituendo, dall'immagine finora utilizzata, le misure dei due segmenti (fig. 14a). Usiamo il segmento orizzontale $\overline{QR}$ per il dimensionamento e il posizionamento dello schema prospettico della seconda immagine con la regola del parallelogramma. Per verificare l'affidabilità del collegamento fra le due immagini, tracciamo la retta proiettante che passa per il punto *S*' della seconda immagine (fig. 15a) e verifichiamo l'intersezione con la retta $\overline{QS}$ nel modello (fig. 15). Il segmento $\overline{QS}$ restituito dalla seconda immagine è più corto di 6 cm rispetto a quello restituito dalla prima immagine[7].

[7] Il segmento $\overline{QS}$, misurato sulla nuvola di punti e sul modello ha lunghezza 11,26 m; lo stesso segmento ha lunghezza 11,24 m nella restituzione dalla prima foto e 11,30 m nella restituzione dalla seconda foto.

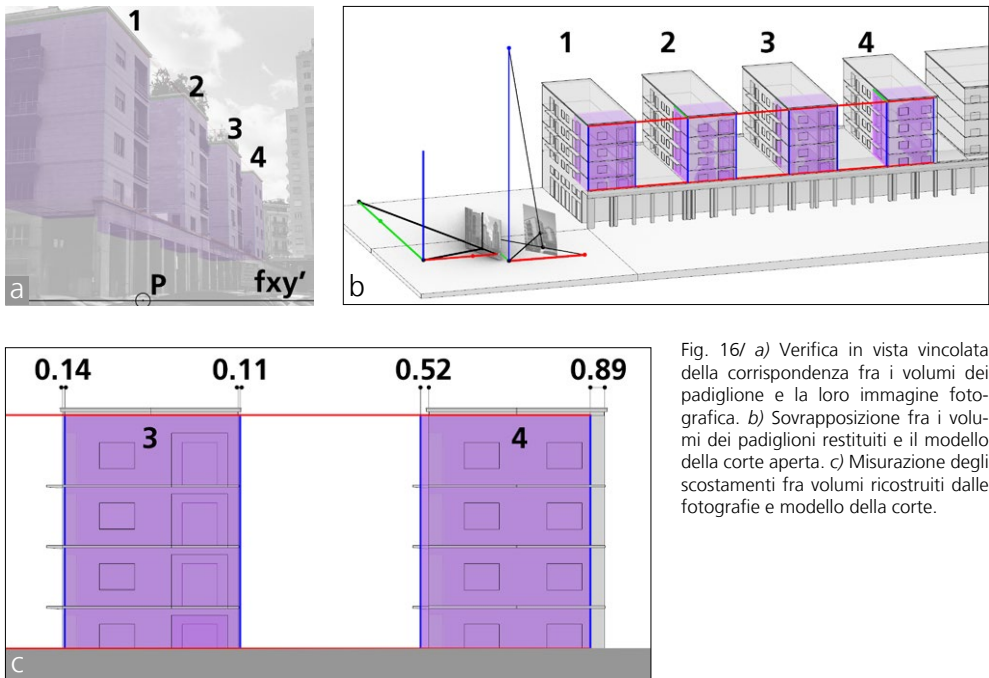



Fig. 16/ *a)* Verifica in vista vincolata della corrispondenza fra i volumi dei padiglione e la loro immagine fotografica. *b)* Sovrapposizione fra i volumi dei padiglioni restituiti e il modello della corte aperta. *c)* Misurazione degli scostamenti fra volumi ricostruiti dalle fotografie e modello della corte.

Questo primo dato offre un'indicazione sull'attendibilità dell'orientamento. La restituzione dei due padiglioni più vicini al punto di presa della fotografia, confrontata con il modello costruito sulle scansioni laser, mostra scarti sempre inferiori ai 10 cm.
Lo scarto si mantiene su quest'ordine di grandezza anche per il terzo padiglione, ma aumenta sensibilmente per il quarto, raggiungendo quasi 1 m di errore; per questo padiglione sarebbe stato più opportuno utilizzare una nuova immagine fotografica più ravvicinata (fig. 16).
Emerge in modo chiaro che la restituzione prospettica richiede controllo e attenzione e non può risolversi in un processo automatico o semi-automatico, perché i suoi esiti sono fortemente condizionati dalla qualità delle immagini, ma anche dalla sensibilità e dalla competenza dell'operatore negli ambiti della scienze della rappresentazione e del progetto di architettura.

Fig. 17/ Il fronte principale di Palazzo Grano fotografato in occasione di una festa religiosa.

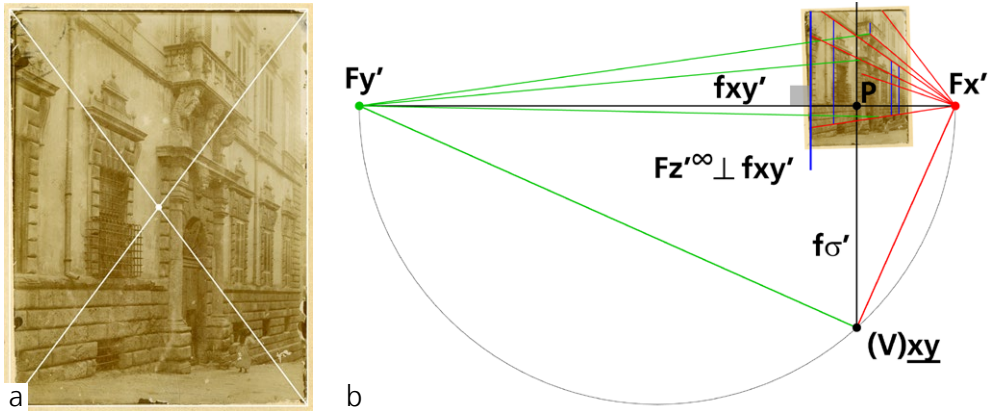
Fig. 18/ Il portale di ingresso danneggiato dal sisma. Si noti la presenza di due mensole poste su piedistalli al di sopra della cornice, sopravvissute al crollo.

Fig. 19/ Estremità sinistra del fronte principale e vista parziale del fronte della cappella annessa al palazzo, anch'essa danneggiata dal sisma.

Messina, 1908. Palazzo Grano

Ogni progetto di ricostruzione impone la definizione di strategie idonee al caso studio, alle sue dimensioni e alla sua complessità morfologica, al fine di utilizzare proficuamente le immagini e la documentazione disponibili.

Nelle pagine che seguono sono riportate alcune esperienze di ricerca condotte in anni recenti. Scopo della breve rassegna che segue è quello di mostrare, in 'veri' casi di ricostruzione, in che modo è stato risolto l'orientamento delle immagini e come siano state utilizzate le tecniche di disegno e modellazione fin qui descritte.

Il primo esempio è la ricostruzione del cinquecentesco Palazzo Grano di Messina gravemente danneggiato del terremoto del 1908 (figg. 17-19), e successivamente abbattuto. Di Palazzo Grano non rimane nulla; anche le strade del quartiere vengono ridisegnate dopo il sisma. Il fronte del palazzo compare in poche foto di bassa risoluzione, quasi sempre inquadrato di scorcio; la sezione ristretta della strada su cui esso si affacciava non permetteva la ripresa di foto frontali. Due sole immagini hanno una qualità che ne permette l'utilizzo per la restituzione; entrambe sono state archiviate nel formato originale, privo di ritagli.

La prima immagine ritrae di scorcio una porzione del fronte (fig. 20a); il parallelismo delle rette verticali, in condizioni di presa così ravvicinate, fa pensare che essa sia stata acquisita con una camera da studio.
La denominazione dei punti di fuga è stata assegnata per associare alla facciata del palazzo la giacitura del piano *xz*.
Il procedimento ha seguito i passaggi tipici della restituzione da foto a quadro verticale, con leggere variazioni dovute alla specificità dell'immagine: a) si trova *Fx'*, punto di fuga delle rette orizzontali della facciata e si tracciano alcune rette verticali; b) si ruota lo schema prospettico per assegnare la direzione dell'asse *z* alle rette verticali; c) per il punto *Fx*' è stata si traccia la *fxy*', orizzontale e ortogonale alle rette verticali.
Poiché le rette ortogonali alla facciata appaiono in tratti brevi, sono stati eseguiti diversi tentativi per trovare una posizione soddisfacente per *Fy*'[8].
Dati *Fx*' e *Fy*', e nota l'immagine nel suo pieno formato, si è ipotizzata l'assenza di decentramenti orizzontali ed è stata tracciata, per il centro geometrico dell'immagine[9], la *f*σ' ortogonale a *fxy*'. Sul prolungamento di questa retta, all'intersezione con la semicirconferenza di diametro $\overline{Fx'Fy'}$, è stato segnato il punto *(V)*<u>*xy*</u> (figg. 20b-c).

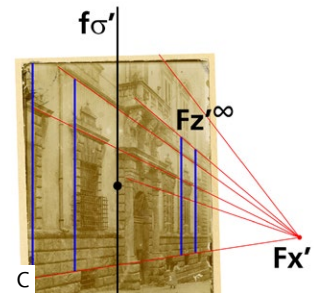



Fig. 20/ Palazzo Grano prima del terremoto. *a)* Centro geometrico della foto del fronte principale. *b)* Individuazione di *fxy'*, di *Fy'* e di *(V)*<u>*xy*</u>. *c)* Rette orizzontali e verticali sul piano della facciata.

8 L'incertezza nella determinazione di Fy', dovuta, come accennato nella descrizione della foto, alla presenza di brevi tratti di rette ortogonali alla facciata, condiziona ovviamente l'accuratezza dell'intera restituzione.
9 In questo caso, la definizione approssimativa dei bordi dell'immagine rende approssimativa anche la determinazione del suo centro geometrico.

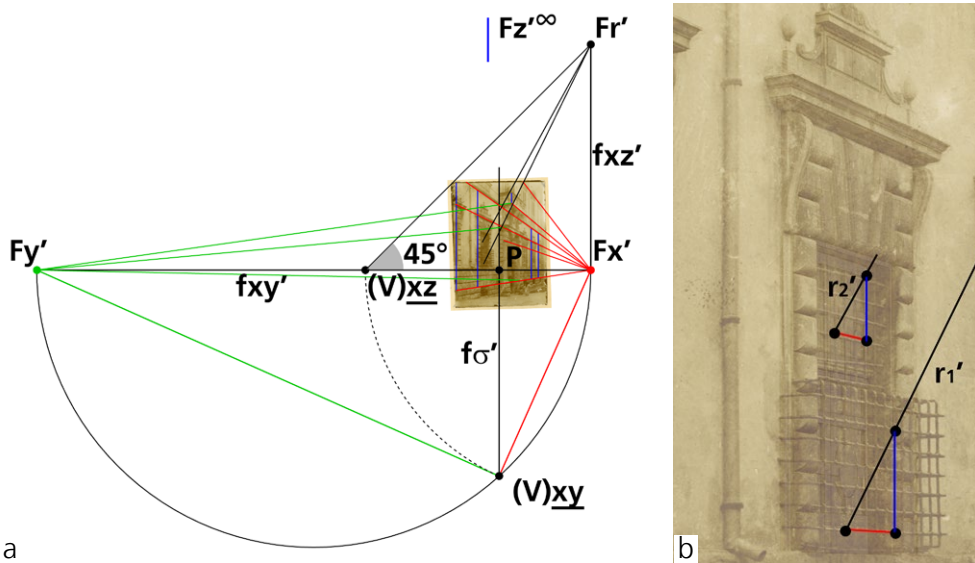
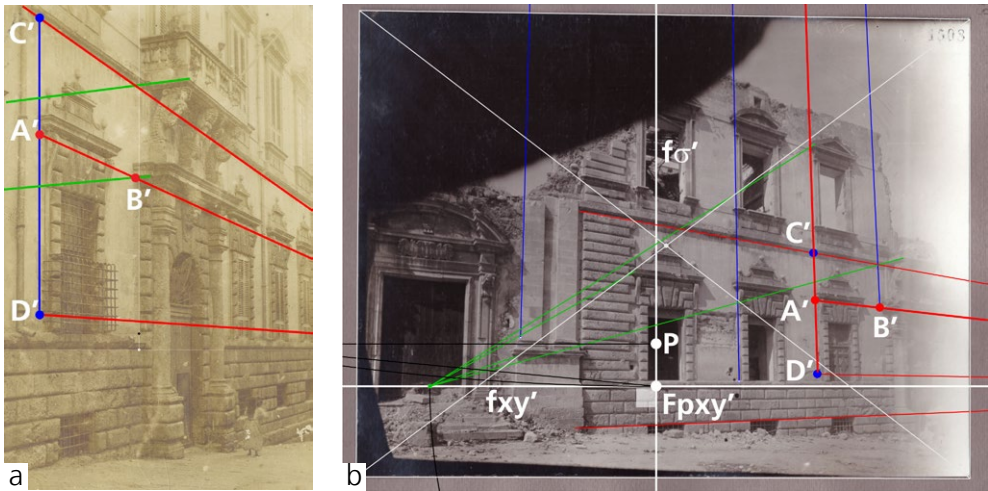



Fig. 21/ *a)* Determinazione del punto di fuga *Fr'*. *b)* Verifica della corrispondenza fra rette che fugano in *Fr'* e l'immagine delle grate in ferro delle finestre del piano terra.

Per verificare, almeno parzialmente, l'impostazione dello schema prospettico, si è costruito il punto *(V)xz* e, da questo, una retta che forma un angolo di 45° con la *fxy*'.
La retta incontra la *fxz*' in *Fr*', punto di fuga delle rette parallele alla facciata che formano un angolo di 45° con le rette orizzontali di direzione *x* (fig. 21a).
Da *Fr*' sono state tracciate delle rette sulle grate in ferro delle aperture al piano terra, ragionevolmente di maglia quadrata; il risultato sembra confermare l'ipotesi (fig. 21b).
La foto utilizzata fino a ora ritrae solo una porzione del prospetto, ma una seconda immagine, scattata poco dopo il terremoto, ritrae l'estremità sinistra e include una porzione della facciata della cappella annessa al palazzo.
L'asse verticale del portone di ingresso e la ricostruzione dell'estremità sinistra, hanno permesso la ricostruzione, per simmetria, dell'intera facciata. La dimensione risultante è stata infine validata sulla prima fotografia, dove l'estremità destra appare molto di scorcio.

La seconda fotografia mostra una prospettiva a quadro leggermente inclinato; il fotografo ha utilizzato il decentramento verticale, ma non ha potuto, o voluto, azzerare la convergenza delle rette verticali.
Il procedimento di restituzione dell'orientamento interno segue dunque i passaggi già descritti.
Dati i tre punti di fuga *Fx*', *Fy*', *Fz*', si osserva, a conferma della presenza del decentramento, che il punto principale P si trova al di sotto del centro geometrico dell'immagine.
La retta *f*σ', condotta per *Fz*' e ortogonale a *fxy*', passa in prossimità del punto baricentrico dell'immagine, probabilmente a causa di un piccolo decentramento orizzontale (fig. 22b).
Poiché l'unica informazione dimensionale, desunta da una planimetria catastale, è l'intera lunghezza della facciata $\overline{QR}$, pari a circa 35 metri (fig. 23), il dimensionamento del modello prospettico potrà essere eseguito solo dopo la ricostruzione dell'intera lunghezza della facciata, dunque dopo aver collegato le due fotografie[10]. A tal fine, sono stati individuati un segmento orizzontale $\overline{AB}$ e un segmento orizzontale $\overline{CD}$, visibili in entrambe le immagini (fig. 22a-b).

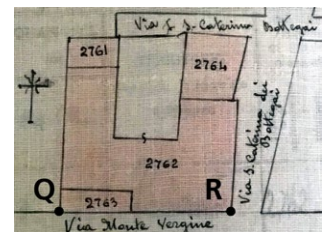



Fig. 22/ *a-b)* Punti di collegamento individuati in entrambe le immagini fotografiche.

Fig. 23/ Planimetria catastale che ha permesso di misurare l'ampiezza della facciata del palazzo.

10 L'approssimazione della misura estratta dalla mappa catastale introduce un ulteriore elemento di incertezza nella ricostruzione.

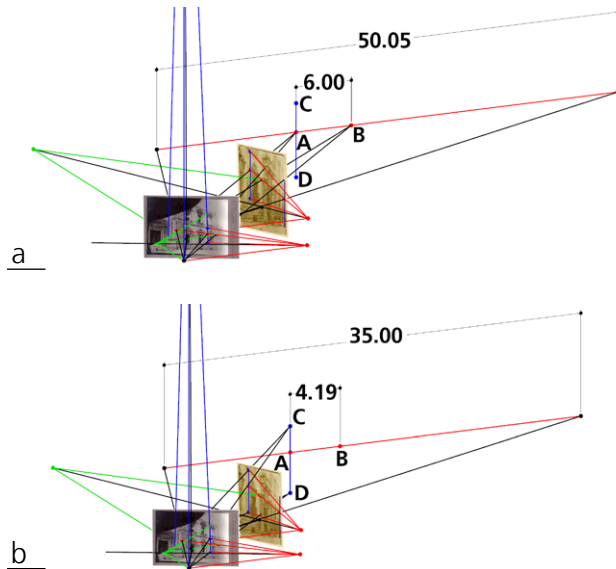
Fig. 24/ *a)* Allineamento delle due fotografia sulla base di una misura ipotetica, utilizzata per applicare la regola del parallelogramma. *b)* Dimensionamento e riallineamento dei due modelli prospettici sulla base della misura nota. Verifica di congruenza sul segmento $\overline{CD}$.

Il segmento $\overline{AB}$ è stato posizionato nello spazio con la regola del parallelogramma, attribuendo al segmento $\overline{VW}$ una lunghezza arbitraria pari a 6 m. L'operazione è stata eseguita anche sulla seconda foto e il segmento $\overline{AB}$, restituito da questa, è stato traslato per sovrapporlo all'omonimo segmento restituito dalla prima immagine. La lunghezza complessiva della facciata è risultata pari a circa 50 m (fig. 24a); calcolato il fattore di riduzione necessario a ricondurre la misura a 35 metri, con $\overline{AB}$ pari a 4,19 m, i due modelli sono stati ridimensionati separatamente, assumendo come base i rispettivi punti *V*; infine, sono stati ricongiunti (fig. 24b). Prima di procedere alla ricostruzione del modello della facciata è stato misurato lo scostamento fra la lunghezza del segmento $\overline{CD}$ restituito dalla prima immagine e quella prodotta dalla seconda, che è risultato, alle due estremità, compreso fra 3 e 7 cm. Per illustrare il processo di ricostruzione, si mostra, a titolo esemplificativo, la modellazione di una mensola di una finestra del piano rialzato. Avendo associato il piano *xz* alla facciata, il profilo della mensola appar-

Fig. 25/ *a)* Vista assonometrica dello schema prospettico e del piano di costruzione *yz*, utilizzato per il disegno del profilo delle mensole. *b)* In vista vincolata, tracciamento del profilo policentrico della mensola.

Fig. 26/ *a)* Vista assonometrica delle mensole e del piano *xz* utilizzato per il disegno del profilo della cornice. *b)* In vista vincolata ricostruzione del profilo della cornice e duplicazione del profilo delle mensole.

terrà a un piano *yz*. Posizionato in *A* un piano di costruzione con giacitura *yz* (fig 25a) utilizziamo la vista vincolata per disegnare il profilo policentrico della mensola utilizzando archi di circonferenza (fig 25b). Il profilo, duplicato per traslazione lungo l'asse *x,* delimita il volume della mensola che, sempre in vista vincolata, può essere a sua volta duplicato e traslato lungo *x* fino a sovrapporsi all'immagine della mensola simmetrica (fig. 26b). La distanza fra le due mensole permetterà di fissare l'asse verticale di simmetria della finestra. Per la cornice, il piano di costruzione sarà invece *xz* (fig. 26a); il profilo restituito produrrà il modello della cornice per traslazione lungo la spezzata orizzontale che ne definisce l'ingombro (fig. 26b).

Fig. 27/ Visualizzazione a fil di ferro del modello della facciata in vista vincolata.

In questo caso occorrerà controllare, in vista libera, la congruità fra l'asse di simmetria della finestra e quello della cornice.
Si può dunque procedere alla costruzione del modello della finestra e dell'intero fronte (fig. 27).
Il confronto visivo fra le immagini e il prodotto della restituzione mostra il buon esito del processo (figg. 28-29). La ricostruzione delle posizioni dei punti di presa delle immagini ha prodotto altezze dal suolo comprese fra 1.40 e 1.70, in aree non occupate da edifici, dunque accettabili.

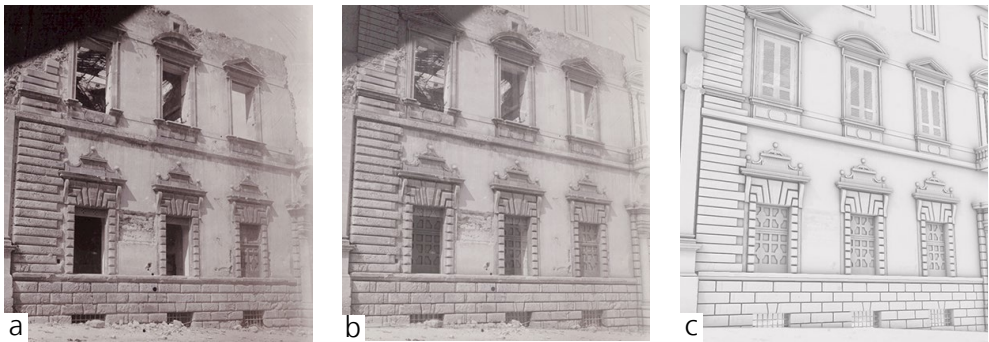
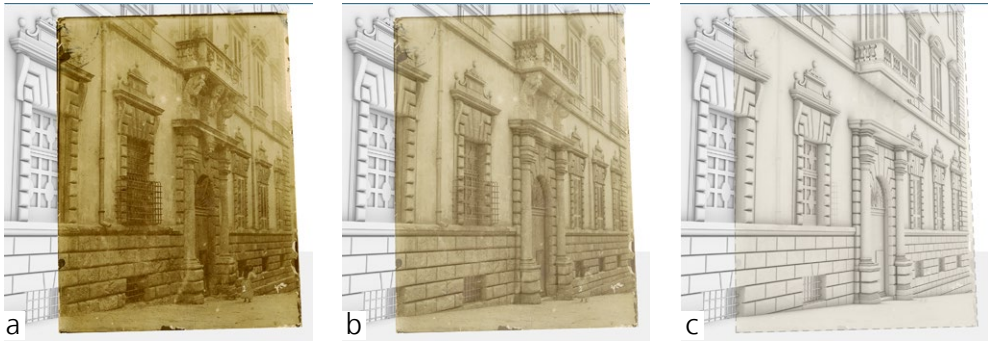



Fig. 28/ Verifica della corrispondenza proiettiva fra la prima fotografia e il modello. *a)* Opacità piena della fotografia. *b)* Opacità 50%. c) Piena trasparenza della fotografia.

Fig. 29/ Verifica della corrispondenza proiettiva fra la seconda fotografia e il modello. *a)* Opacità piena della fotografia. *b)* Opacità 50%. c) Piena trasparenza della fotografia.

Fig. 30/ Vista del modello ricostruttivo e della posizione delle fotografie usate per la ricostruzione.

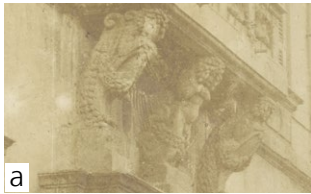



Fig. 31/ *a)* Mensole sopravvissute alla distruzione. *b)* Le mensole esposte al Museo Interdisciplinare di Messina. *c)* Rotazione del modello della mensola per conferire giacitura orizzontale all'estremità superiore.

Fig. 32/ Verifica visiva della corrispondenza proiettiva fra la prima fotografia e le mensole posizionate nel modello. *a)* Opacità piena della fotografia. *b)* Opacità 50%. c) Piena trasparenza della fotografia.

Due delle mensole poste sopra il portale di ingresso e sopravvissute alla distruzione (fig. 31a), sono oggi esposte al Museo Interdisciplinare di Messina (fig. 31b). I modelli delle mensole, generati con metodi fotogrammetrici SfM, sono stati ruotati in modo da assegnare giacitura orizzontale al piano sommitale, come richiesto dalla loro funzione (fig. 31c). Le mensole sono state quindi posizionate sul modello della facciata[11]. La corrispondenza, nella vista vincolata, fra l'immagine delle mensole e i modelli, ha confermato la buona approssimazione del processo di ricostruzione (fig. 32a-c).

11 Grazie alla simmetria, riconoscibile nella fotografia, il modello della mensola posto a un'estremità del balcone è stato riproposto specularmente all'estremità opposta.

Fig. 33/ La chiesa madre di Salemi nella sua attuale configurazione.

Fig. 34/ Viste della nuvola di punti acquisita con Laser scanner. a) All'estremità sinistra della facciata rimangono tracce consistenti della parasta angolare. *b)* All'estremità destra si conserva solo il cantonale.

Salemi (TP), 1968. Chiesa madre

La chiesa madre di Salemi, gravemente danneggiata dal terremoto che devasta la Valle del Belice nel 1968, viene abbattuta.

Rimangono (fig. 33) la parte presbiterale e le basi delle colonne che separavano la navata centrale dalle laterali[12]; sono altresì visibili tracce del basamento della facciata, con le basi delle paraste (fig. 34).

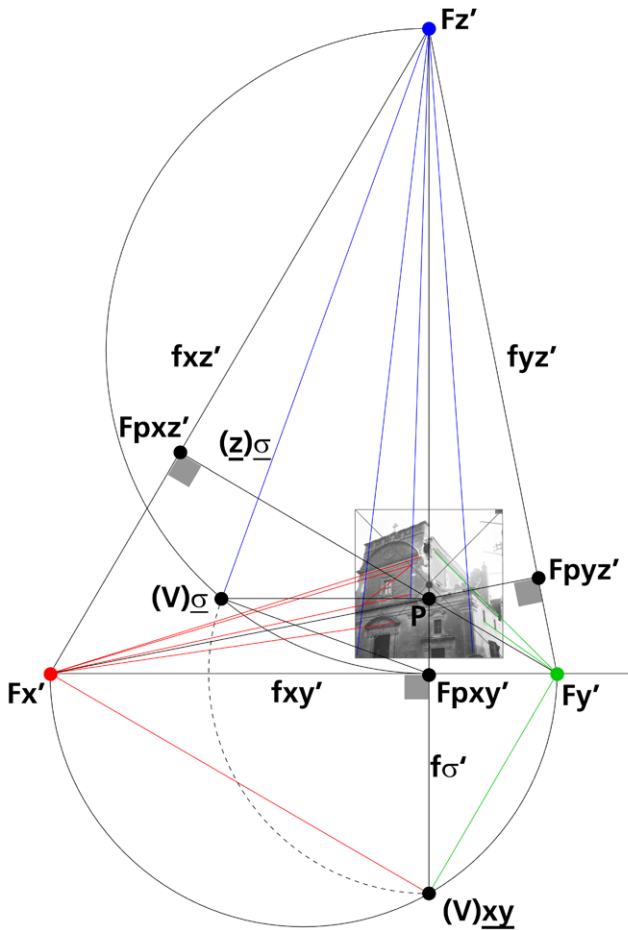
A differenza dell'esempio di palazzo Grano di Messina, gli elementi della chiesa madre rimasti *in situ* permettono di posizionare il modello ricostruttivo nel suo originario contesto.

12 Il progetto di consolidamento dei ruderi della chiesa, parte di un più ampio intervento di riqualificazione dell'area, viene redatto alla metà degli anni '90 da Alvaro Siza e Roberto Collovà.

Fig. 35/ Foto usata per iniziare la procedura di restituzione della facciata.

Fig. 36/ Seconda fotografia, usata per integrare la restituzione della parte basamentale della facciata.

Il caso di Palazzo Grano è, in realtà, un'eccezione. Quasi sempre il sito dove gli edifici scomparsi erano ubicati conserva qualche traccia che permette di connettere il modello ricostruttivo al frammento dell'edificio sopravvissuto ai cambiamenti.
Della chiesa madre di Salemi si conservano poche fotografie, tratte da pubblicazioni a stampa. Non abbiamo dunque informazioni attendibili sulla posizione del punto principale. Ai fianchi della chiesa si trovano due strade molto strette; per questo motivo, la facciata è fotografata quasi sempre frontalmente. In assenza di precedenti rilievi o disegni, e della posizione del punto principale, la disponibilità dei soli punti di fuga delle rette della facciata, ad esempio *Fx*' e *Fz*', rende impraticabile la restituzione. L'unica foto in cui viene ripreso anche il fianco della chiesa, scattata poco dopo il terremoto, ritrae soltanto la parte alta della facciata e non permette, pertanto, di utilizzare gli elementi della parte basamentale per il dimensionamento e l'orientamento (fig. 35). Questa foto, però, consente di estrarre informazioni utili a orientare la seconda foto, che riprende la facciata quasi frontalmente e include la parte basamentale (fig. 36). In modo simile a quanto fatto nell'esempio precedente, si procederà al dimensionamento e all'orientamento dopo aver definito lo schema prospettico composto dalle due fotografie correttamente allineate. La prima foto ha quadro inclinato e permette di individuare i tre punti di fuga *Fx*', *Fy*', *Fz*'. Lo schema viene ruotato per dare direzione orizzontale alla *fxy*'; la retta $f\sigma$', condotta per *Fz*' e ortogonale a *fxy*', passa per il centro geometrico dell'immagine.
La determinazione grafica della posizione del punto principale P (fig. 37), data dall'ortocentro del triangolo delle fughe che ha vertici *Fx*', *Fy*' e *Fz*' e confermata dalle relazioni fra *(V)*$\underline{xy}$ e *(V)*$\underline{\sigma}$, risulta più in basso del centro geometrico dell'immagine.

Fig. 37/ Restituzione dell'orientamento interno della prima fotografia.

Si potrebbe ipotizzare un decentramento verticale eseguito con una camera da studio, ma questa ipotesi non spiegherebbe la spiccata convergenza delle retta verticali; stante il formato pressoché quadrato dell'immagine, risulta più plausibile ipotizzare un ritaglio della parte bassa per motivi editoriali. La restituzione dell'orientamento interno dell'immagine permette di misurare l'angolo di pendenza α, rispetto a una retta orizzontale, di una retta che congiunge gli spigoli di due aperture sul piano della facciata, detti *A* e *B*.

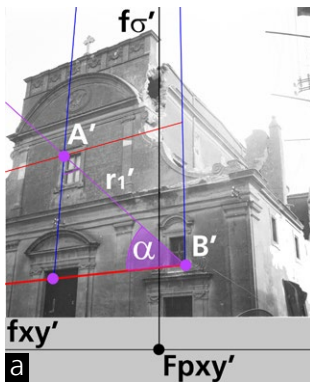
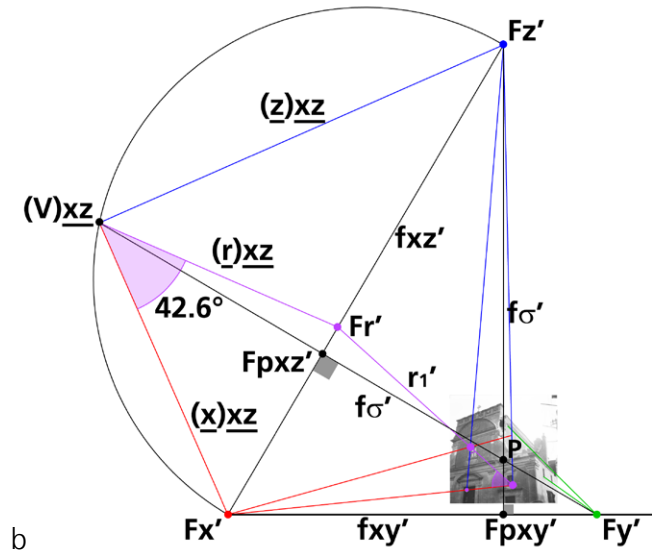



Fig. 38/ *a)* Individuazione, sulla fotografia, dei punti *A*' e *B*' e della retta *r₁*'. *b)* Misura dell'angolo α formato dalle direzioni r e x sul ribaltamento del piano *xz*.

L'angolo individuato sull'immagine (fig. 38a) viene misurato sul ribaltamento del piano *xz*. La retta *f*σ', che passa per *P* (e per *Fy*') ed è ortogonale a *fxz*', interseca in *(V)xz* la semicirconferenza di diametro $\overline{Fx'Fz'}$. Tracciata la retta r_1' e trovato, all'intersezione con la *fxz*', il punto di fuga *Fr*', si disegnano, da *(V)xz*, le rette *(x)xz*, *(y)xz* e *(r)xz*; si misura dunque l'angolo α formato dalla direzione x e dalla direzione r, pari a 42.6° sessadecimali (fig. 38b). Per l'orientamento della seconda immagine tracciamo le rette verticali e orizzontali parallele alla facciata e troviamo i punti di fuga *Fx*' e *Fz*'. Il punto *Fy*' non viene trovato per via diretta, stante la presenza di una sola retta visibile nella fotografia. Tracciamo anche la retta r_1' per i punti *A*' e *B*' (fig. 39a). La retta r_1' interseca la retta di fuga *fxz*' nel punto *Fr*' (fig. 39b). Si traccia adesso la semicirconferenza di diametro $\overline{Fx'Fz'}$ (fig. 40a); noto l'angolo α = 42.6°, possiamo tracciare una circonferenza di centro *C*, che passa per i punti *Fx*' e *Fr*'; il punto *C* è dato dall'intersezione delle rette che passano per *Fx*' e *Fr*' e formano con la *fxz*' angoli β = (180-2α)/2, pari a 47.4°.

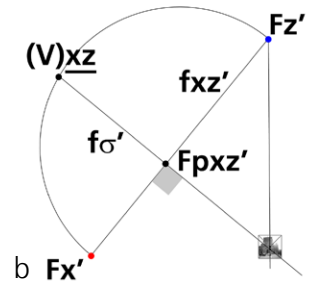
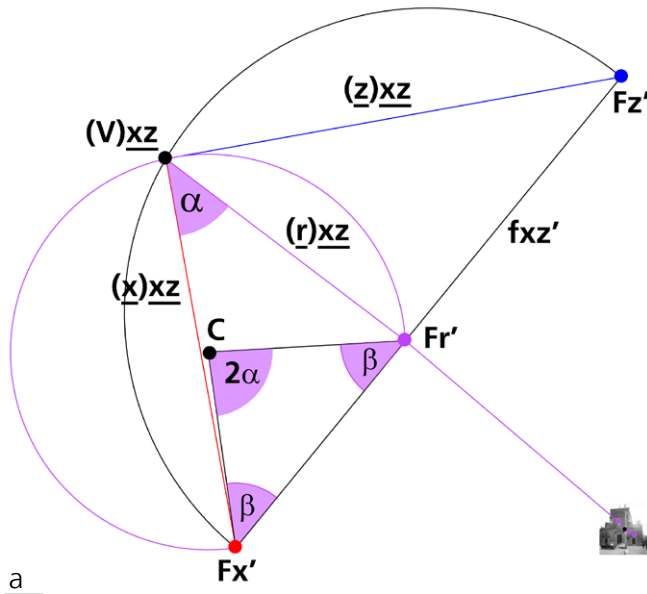
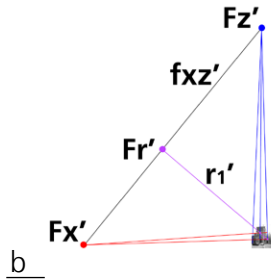
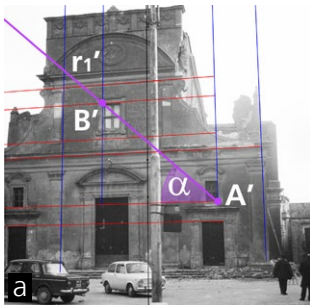



Fig. 39/ *a)* Individuazione, sulla seconda fotografia, dei punti *A*' e *B*' e della retta *r1*'. *b)* Tracciamento della retta di fuga *fxz'* e individuazione del punto di fuga *Fr'*.

Fig. 40/ a) Tracciamento delle circonferenze che determinano, per intersezione, il punto *(V)xz*. *b)* Tracciamento della retta *f*σ*'*, che passa per *(V)xz* ed è ortogonale a *fxz'*.

Il punto di intersezione delle due circonferenze sarà *(V)xz*; le rette *x* e *r* formeranno in questo punto l'angolo $\alpha = 42.6°$. Dal punto *(V)xz* si traccia una retta *f*σ' ortogonale alla *fxz*'; questa retta passerà per il punto principale *P* (fig. 40b).
In assenza di *Fy*', punto di fuga delle rette ortogonali a *xz*, si è deciso di ricorrere a ipotesi aggiuntive, riservandosi di verificarne l'esito. In particolare, si è stabilita l'appartenenza del punto principale all'asse verticale dell'immagine; è stata pertanto tracciata una nuova retta, che passa per *Fz*' e per il centro geometrico dell'immagine.

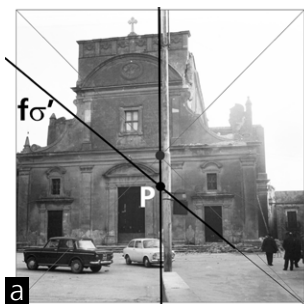
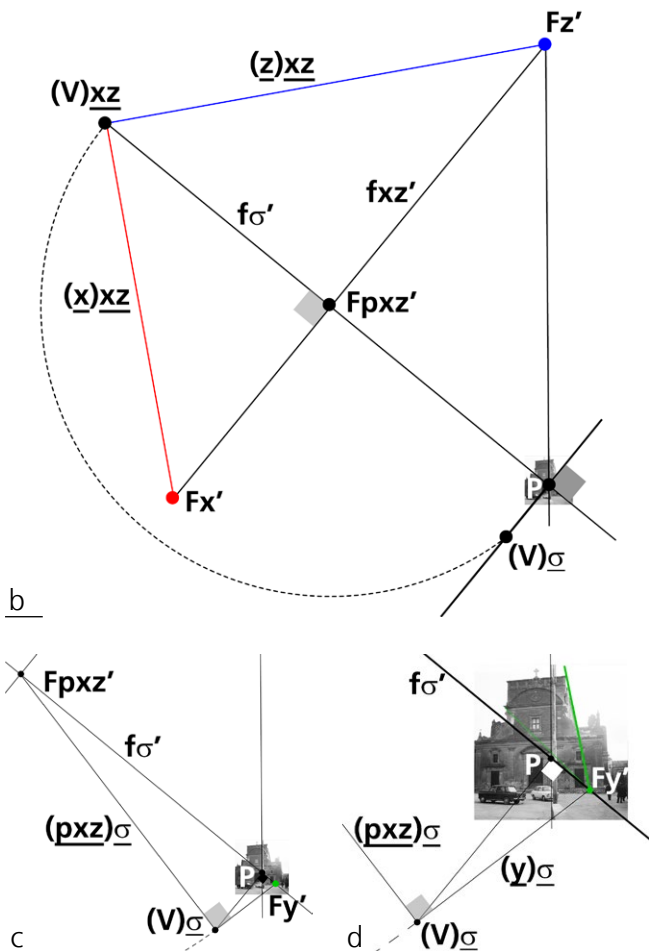



Fig. 41/ *a)* Individuazione del punto principale *P*. b) Tracciamento della circonferenza che determina, per intersezione, il punto *(V)*σ. *c)* Tracciamento della retta *(pxz)*σ e della retta, a essa ortogonale, che interseca la *f*σ*'* in *Fy'*. *d)* Verifica dell'unica retta visibile che fuga in *Fy'*.

Il punto *P* viene fissato dall'intersezione fra questa retta e *f*σ' (fig. 41a).
Dato il punto *P*, possiamo condurre per esso una retta ortogonale alla *f*σ'. La circonferenza che ha centro in *Fpxz*' e passa per *(V)xz* intersecherà questa retta in *(V)*σ (fig. 41b). La distanza fra i punti *P* e *(V)*σ è la distanza principale.
Si prosegue dunque tracciando la retta *(pxz)*σ che passa per *(V)*σ e per *Fpxz*'; la retta ortogonale a questa, passante per *(V)*σ, sarà la *(y)*σ, che intersecherà la *f*σ' in *Fy*' (fig. 41c).

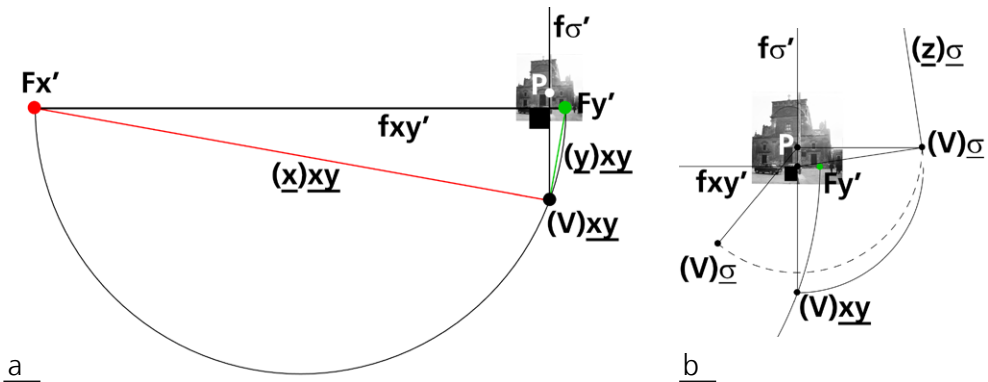



Fig. 42/ *a)* Individuazione della retta di fuga *fxy*' e del punto *(V)xy*. *b)* Verifica dell'invarianza della distanza principale misurata con due diversi ribaltamenti di *V*.

La retta che passa per *Fy*' corrisponde abbastanza bene all'immagine di scorcio del fianco della chiesa (fig. 41d).
Avendo trovato *Fy*', possiamo rappresentare la retta di fuga *fxy*' e ruotare l'intero schema prospettico in modo da assegnare a questa retta la direzione orizzontale. Verifichiamo anche che la retta che passa per *Fz*' e per *P*[13] formi con la *fxy*' un angolo retto.
Questa retta intersecherà in *(V)xy* la semicirconferenza di diametro $\overline{Fx'Fy'}$. Possiamo dunque tracciare le rette *(x)xy* e *(y)xy* (fig. 42a).
Prima di passare all'orientamento esterno, verifichiamo la congruenza interna dello schema prospettico: abbiamo già misurato la distanza principale $\overline{VP}$ grazie al ribaltamento eseguito in precedenza.
Se adesso misuriamo la distanza principale con un nuovo ribaltamento, secondo il piano sezione retta del diedro formato da *xy* e π, dovremmo trovare la stessa dimensione.
La circonferenza che ha centro in *P* e passa per i due ribaltamenti *(V)σ* verifica l'invarianza della distanza principale (fig. 42b).
Possiamo dunque procedere con l'orientamento esterno delle due fotografie. A differenza di quanto fatto prima, eseguiamo direttamente l'orientamento esterno della seconda fotografia, alla quale collegheremo successivamente la prima.

13 Anche questa retta è una retta di fuga di piani sezione retta, e va pertanto denominata *f*σ'. Si tratta della retta di fuga dei piani sezione retta del diedro formato da *xy* e da π. Si è preferito lasciarla anonima, fino ad ora, per evitare confusione con la fσ' del diedro formato da *xz* e π.

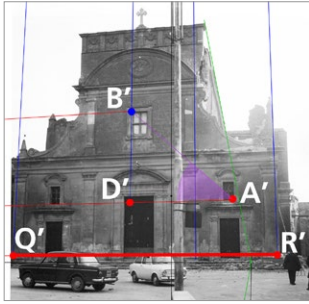



Fig. 43/ Tracciamento del segmento $\overline{QR}$ nella seconda immagine.

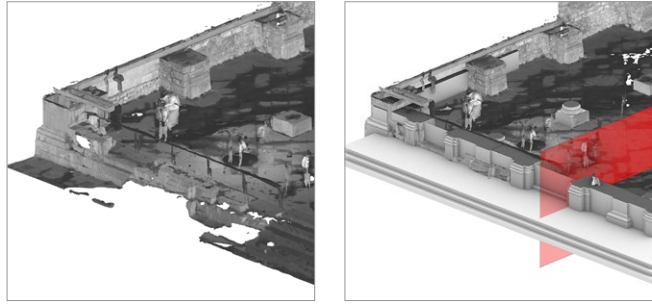



Fig. 44/ a) Nuvola di punti acquisita con laser scanner. *b)* modellazione delle parti residuali del basamento presenti nella metà sinistra della facciata e individuazione dell'asse di simmetria longitudinale.

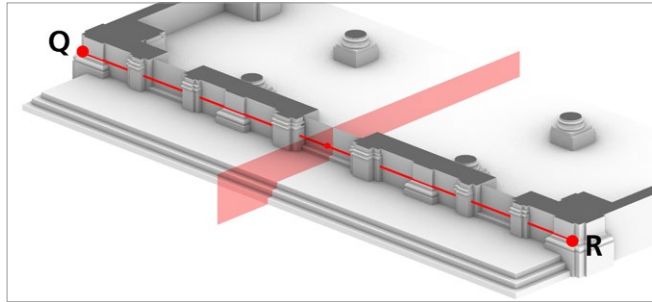
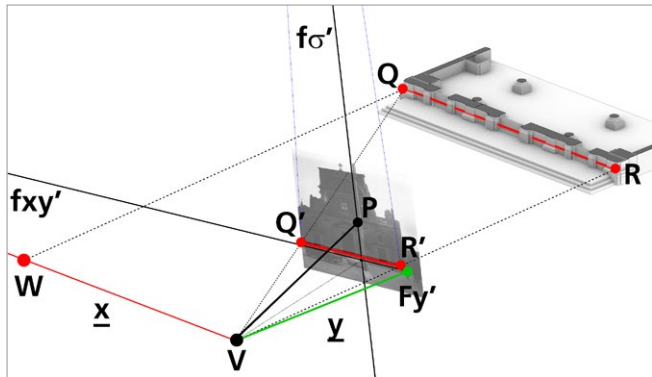



Fig. 45/ Misura del segmento $\overline{QR}$ sul modello della parte basamentale, ottenuto dalla duplicazione speculare della parte sinistra.

Fig. 46/ Dimensionamento e orientamento della seconda immagine fotografica con la regola del parallelogramma.

Individuiamo sulla seconda immagine il segmento di lunghezza $\overline{QR}$, corrispondente all'ampiezza complessiva della facciata (fig. 43). Il rilievo delle parti basamentali della parte sinistra della facciata ha permesso di rintracciare l'asse di simmetria longitudinale della navata centrale (fig. 44) e, grazie a esso, di fissare la distanza $\overline{QR}$ fra le due paraste d'angolo (fig. 45). Il segmento $\overline{QR}$, posizionato alla quota di imposta delle paraste, sia nell'immagine che nel

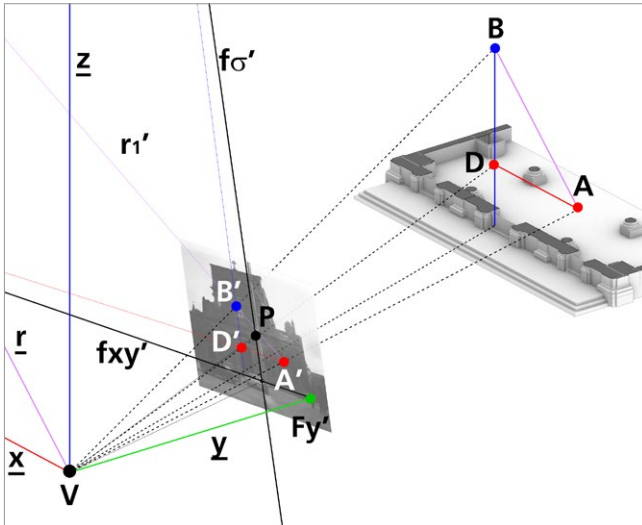



Fig. 47/ Restituzione dei segmenti $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$ dalla seconda immagine fotografica.

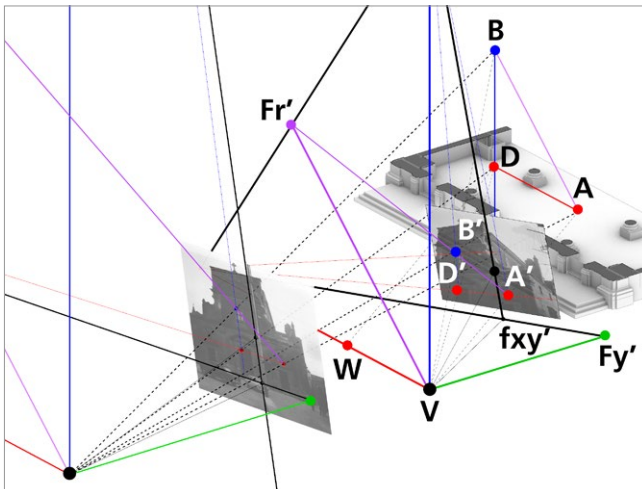
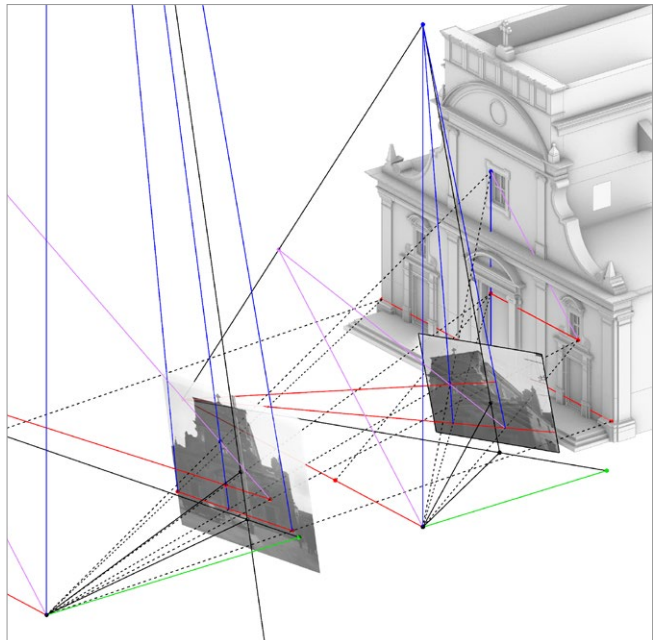
Fig. 48/ Orientamento della prima immagine fotografica sulla base del segmento $\overline{AD}$ e verifica della misura restituita del segmento $\overline{BD}$.

modello, ha permesso di dimensionare il modello prospettico con la regola del parallelogramma e di posizionarlo nel sistema di riferimento della nuvola di punti (fig. 46).
Si è dunque proceduto a restituire le misure dei segmenti $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$ (fig. 47), visibili anche nella prima immagine, il cui schema prospettico è stato orientamento e dimensionato utilizzando il segmento $\overline{AD}$ (fig. 48).

Fig. 49/ Verifica visiva della corrispondenza fra il modello e la prima immagine fotografica. *a)* Opacità piena della fotografia. *b)* Opacità 50%. c) Piena trasparenza della fotografia.

Fig. 50/ Verifica visiva della corrispondenza fra il modello e la seconda immagine fotografica. *a)* Opacità piena della fotografia. *b)* Opacità 50%. c) Piena trasparenza della fotografia.

Fig. 51/ Ricostruzione del modello della facciata e della posizione dei punti di presa.

La verifica di congruenza, data dal confronto fra le misure di $\overline{BD}$ restituite dalle due immagini, ha prodotto scarti inferiori ai 2 cm. Si può dunque procedere alla ricostruzione della facciata della chiesa.

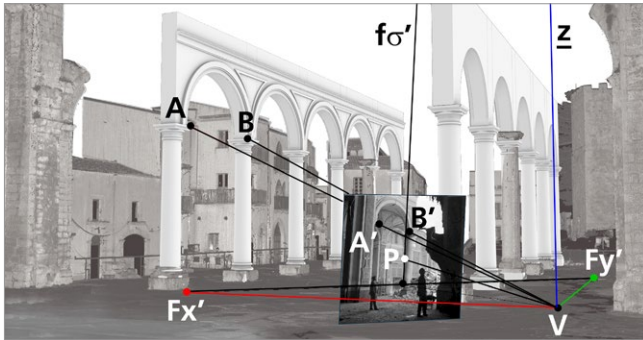



Fig. 52/ Restituzione del colonnato della navata centrale.

Fig. 53/ Il modello della chiesa, inserito nel rilievo laser scanning dell'area.

La verifica visiva mostra una buona congruenza fra il modello e le due fotografie (figg. 49-50) e anche la posizione dei punti di presa risulta compatibile con l'assetto del suolo e degli edifici limitrofi (fig. 51).
La ricostruzione dello spazio interno della chiesa è stata condotta con l'ausilio di poche immagini (fig. 52); anche in questo caso il rilievo delle parti residuali rimaste *in situ* ha permesso di dimensionare e posizionare i modelli prospettici in uno stesso sistema di riferimento, coerente con quello della facciata (fig. 53). È stato così possibile ricostruire un modello unitario, che rappresenta le parti salienti della fabbrica: la facciata, le navate, l'area presbiterale. Il riferimento del modello al rilievo dell'area ha permesso infine di eseguire una sperimentazione su forme di visualizzazione utili far conoscere la ricostruzione della chiesa all'esterno della cerchia degli specialisti.

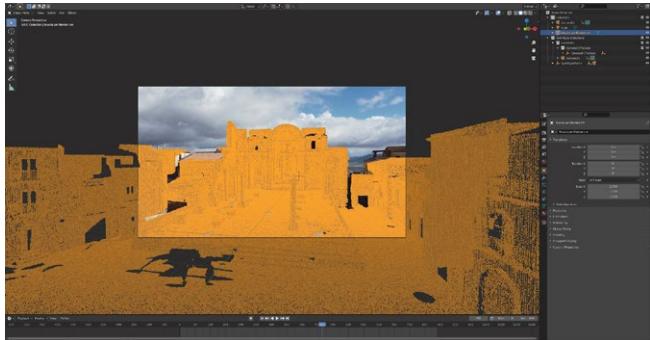
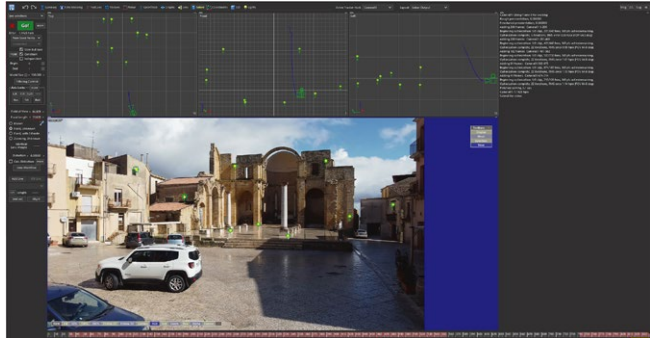
Fig. 54/ Applicazione di *motion tracking*. *a)* Identificazione dei *trackers* e attribuzione delle coordinate. *b)* Inserimento della nuvola di punti nel flusso video.

In particolare, è stato prodotto l'inserimento del modello virtuale in un flusso video dell'area ripreso con l'ausilio di un drone.
Questo tipo di elaborazione, frequentemente utilizzata in ambito cinematografico, è detta *motion tracking*; i software che permettono lo sviluppo di questi prodotti utilizzano algoritmi analoghi a quelli della fotogrammetria SfM per calcolare il percorso della telecamera all'interno di un determinato contesto. Anche in questo caso, affinché il modello che descrive il percorso della telecamera sia orientato e dimensionato, occorre introdurre la lunghezza di un segmento orientato, secondo una procedura analoga a quelle qui utilizzate per la regola del parallelogramma, o a quelle che permettono di definire l'orientamento esterno in *Fspy* e *Sketchup*.
Fra i software che permettono di calcolare il percorso della telecamera, è stato testato *Syntheyes*,

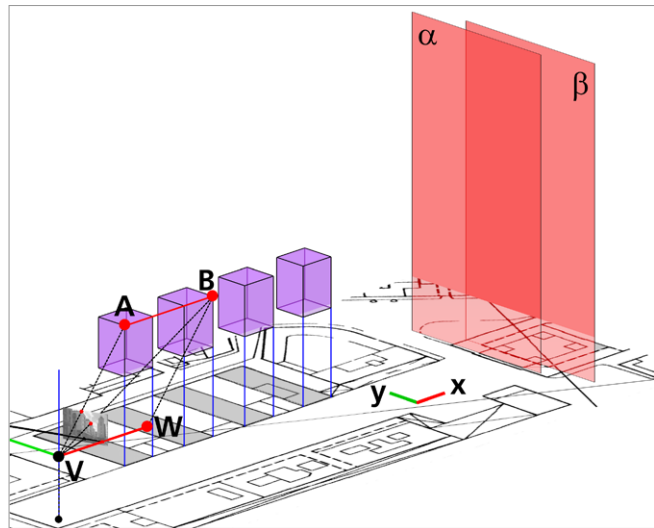
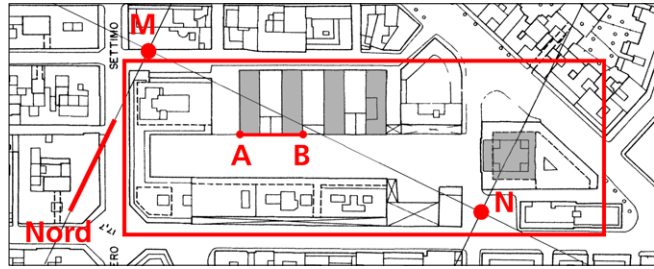
Fig. 55/ Inserimento del modello ricostruttivo nel flusso video.

un prodotto commerciale che permette di risolvere l'orientamento interno ed esterno di un flusso video tramite un processo simile a quello utilizzato dalle applicazioni SfM, ossia utilizzando le coordinate spaziali, desunte ad esempio da un rilievo, di punti riconoscibili in diversi fotogrammi del video, detti *trackers* (fig. 54a). In questo caso le coordinate dei *trackers* sono state estratte dalla nuvola di punti acquisita con lo scanner laser; il software permette anche di importare la nuvola di punti e sovrapporla al flusso video per controllarne la congruenza (fig. 54b). Il percorso della telecamera è così riferito anche al modello ricostruttivo, che può essere integrato nella scena ripresa nel video (fig. 55).

Restituzioni su cartografie

Al fine di introdurre la descrizione del caso studio che conclude questo capitolo, occorre trattare il procedimento di restituzione prospettica condotto con l'ausilio di una rappresentazione cartografica, che rappresenta lo stato dei luoghi raffigurato nell'immagine fotografica.
Per illustrare il procedimento faremo riferimento ancora al caso studio di piazzale Ungheria, e utilizzeremo una cartografia per risolvere il problema della restituzione del grattacielo, descritto nelle pagine che precedono (cfr. fig. 13 in questo capitolo).

Fig. 56/ Cartografia in scala 1:2000 con la rappresentazione del la planimetrica di piazzale Ungheria.

Fig. 57/ Il modello prospettico e i padiglioni restituiti in precedenza vengono orientati sulla cartografia utilizzando la regola del parallelogramma. L'elevazione dei volumi rispetto alla carta è arbitraria e funzionale a consentire la migliore visibilità delle relazioni di posizione.

Immaginiamo che il grattacielo in fondo alla corte non esista più e che si voglia eseguirne la ricostruzione dalle foto disponibili. Per superare il problema dell'indeterminazione della sua dimensione, utilizziamo una carta tecnica in scala 1:2000 che rappresenta la planimetria della corte e degli edifici costruiti sui suoi lati. Diamo per nota la soluzione dell'orientamento interno. L'immagine della carta, importata nel software di disegno, viene dimensionata grazie al segmento $\overline{MN}$ del reticolo di maglia quadrata con lato pari a 200 m, e viene ruotata per assegnare la direzione dell'asse *x* al fronte lungo della corte, secondo il sistema di riferimento adottato (fig. 56). La lunghezza del segmento $\overline{AB}$, misurata sulla carta, è compatibile, tenuto conto del diverso

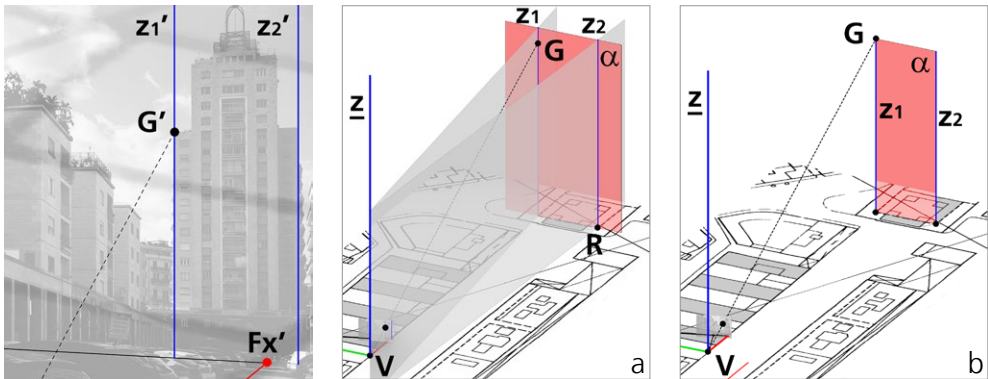



Fig. 58/ Individuazione, sulla foto, di rette e punti da ricostruire.

Fig. 59/ *a)* Piani e rette che proiettano i punti e le rette individuati sulla fotografia. *b)* Ricostruzione del piano della parete di fondo della facciata.

coefficiente di accuratezza, con la misura desunta dal rilievo. Lo schema prospettico e i padiglioni restituiti in precedenza vengono riferiti alla cartografia grazie alla misura $\overline{AB}$, utilizzando la regola del parallelogramma; vengono altresì sollevati rispetto alla carta, per favorirne la visibilità (fig. 57). Osserviamo che il fronte del grattacielo rivolto verso la corte si articola su due piani, che hanno giacitura *yz* nel sistema di riferimento adottato: un piano di fondo, di minore altezza, che chiameremo α, e un piano in aggetto, denominato β. La posizione dei due piani è chiaramente indicata sulla cartografia.
Data dunque l'immagine acquisita con la camera da studio, possiamo procedere alla restituzione.
Tracciamo sull'immagine le rette verticali z_1' e z_2'[14] agli estremi del piano di fondo della facciata, e segniamo in *G*' la sua estremità superiore (fig. 58).
Costruiamo quindi i piani proiettanti che passano per $\underline{z}$ e per due punti scelti liberamente sulle rette z_1' e z_2'; i due piani intersecano il piano verticale α in z_1 e z_2; queste rette intersecano la carta in corrispondenza degli estremi del segmento che rappresenta l'ampiezza di questa parte della facciata. La retta proiettante che passa per *G*' interseca in *G* la z_1; tracciando per questo punto una retta orizzontale, abbiamo delimitato, a eccezione del margine inferiore, il piano di fondo della facciata (fig. 59).

14 Ricordiamo che l'immagine scelta ha giacitura verticale e che *Fz*' è pertanto improprio.

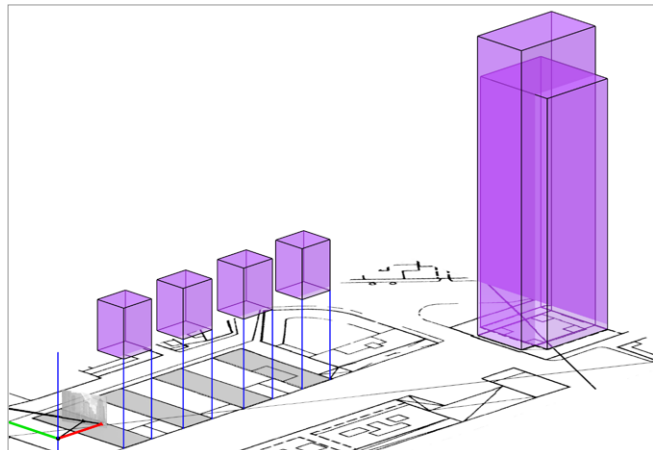
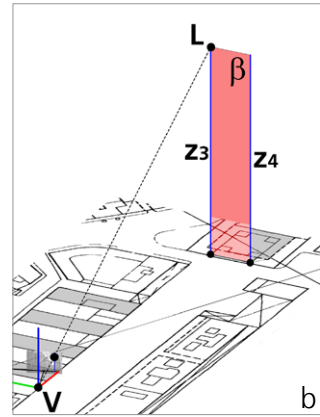
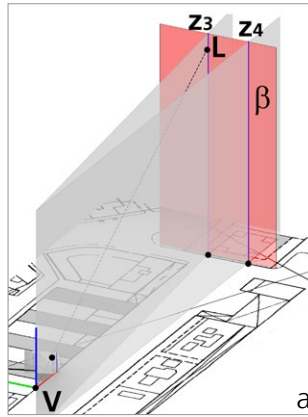
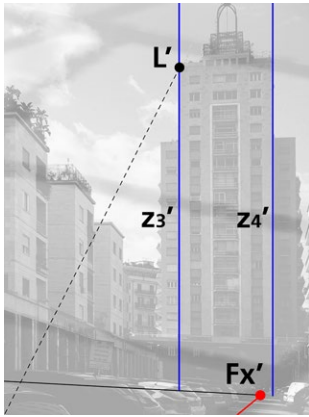



Fig. 60/ Individuazione, sulla foto, di rette e punti da ricostruire.

Fig. 61/ *a)* Piani e rette proiettanti. *b)* Ricostruzione del piano della parete di fondo della facciata.

Fig. 62/ Verifica in vista vincolata della corrispondenza fra immagine e ricostruzione.

Fig. 63/ Modello ricostruttivo e cartografia di riferimento.

In modo analogo procediamo alla restituzione dell'avancorpo di facciata: tracciate sulla foto le due rette z_3' e z_4' (fig. 60), si costruiscono i piani proiettanti, che intersecano β in z_3 e z_4 (fig. 61a).
La retta proiettante che passa per *L'* interseca la retta z_3 in *L*; la retta orizzontale che passa per *L* definisce l'estremità superiore dell'avancorpo (fig. 61b).
La ricostruzione dei volumi del grattacielo e dei padiglioni viene verificata nella vista vincolata (fig. 62).
Benché la restituzione della facciata del grattacielo corrisponda bene alla sua rappresentazione cartografica (fig. 63), se confrontiamo il modello restituito dalla foto con quello prodotto sulla base del

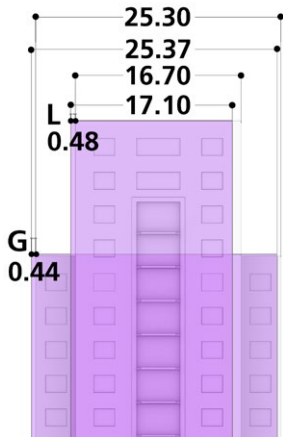



Fig. 64/ Scarti di misura e posizione sulla facciata del grattacielo.

Fig. 65/ Confronto fra il modello della piazza e la restituzione da fotografia.

Fig. 66/ Vista ortografica superiore della carta, dello schema prospettico e dei modelli ricostruiti dalla fotografia.

rilievo (fig. 64), osserviamo scarti di posizione e misura compresi fra 10 e 50 cm, comparabili a quelli misurati in precedenza per il quarto padiglione (fig. 65). Si tratta di un errore prevedibile, data la scala di riduzione della carta, la distanza di circa 175 m fra il grattacielo e il punto di presa (fig. 66), e la dimensione equivalente del pixel[15] sull'oggetto, che in questo caso può essere solo indicativamente stimata in circa 4 cm.

Dal processo fin qui descritto emerge in modo evidente l'assenza della ricostruzione del piano di calpestio e dell'attacco a terra degli edifici. La rappresentazione del suolo è una questione di difficile risoluzione con i metodi fin qui illustrati, sia perché l'attacco a terra degli edifici è molto spesso occultato, nel nostro caso dalle auto in sosta, sia perché la morfologia del suolo è spesso complessa e sfugge alla riduzione in curve e piani, congeniale alla restituzione prospettica.

15 L'immagine, che ha dimensioni 90 x 60 mm, è stata digitalizzata con risoluzione 3752 x 2514 pixel; la dimensione del pixel sull'immagine è dunque 90/3752 = 0.024 mm. La dimensione sull'oggetto deriva da una semplice proporzione: detta 'pim' la dimensione del pixel sull'immagine, 'pog' la dimensione sull'oggetto, 'f' la distanza focale e 'd' la distanza dell'oggetto dalla camera, si ha: pim:f=pog:d. Data la distanza di 175 m e nota f=100 mm, la proporzione restituisce un valore pog pari a 42 mm. Quindi la foto permette di osservare dettagli nell'ordine dei 5 cm. Va osservato che la questione della dimensione del pixel ha senso nelle immagini digitali, mentre risulta ben più complessa nelle immagini analogiche, perché legata alla pellicola o lastra utilizzata. La valutazione fatta per l'immagine acquisita con la camera da studio, impressa su pellicola e successivamente digitalizzata, ha dunque valore meramente indicativo.

Fig. 67/ Dettaglio del Foglio 11 della Carta della Città di Palermo in scala 1:5000, realizzata nel 1935 dalla Società Anonima Ottico Meccanica Italiana e Rilevamenti Aerofotogrammetrici (O.M.I.R.A.).

Fig. 68/ *a-b)* Immagini della Cala prima dei bombardamenti.

Nella pagina successiva
Figg. 69-70/ La Cala prima dei bombardamenti del 1943. Fotografie di Eugenio Bronzetti. Le immagini sono impresse su lastre di vetro alla gelatina di bromuro d'argento di formato 10*15 cm.

Palermo, 1943: la 'Cala'

Il porto antico della città di Palermo, detto 'Cala', è, come spesso accade nelle città di fondazione fenicia, un'ansa della linea di costa.
La cortina edilizia che senza soluzioni di continuità delimitava il perimetro dell'invaso, fu parzialmente distrutta da un bombardamento degli alleati nel 1943.
Alcuni degli edifici distrutti sono stati sostituiti da edifici moderni; in altri casi è rimasto un vuoto.
L'assetto della Cala prima dei bombardamenti è documentato da una carta della città di Palermo del 1935, in scala 1:5000 (fig. 67) e da diverse immagini fotografiche. Molte di queste, scattate dal suolo, inquadrano porzioni molto limitate della cortina edilizia (fig. 68). Due fotografie di Eugenio Bronzetti[16], scattate nel 1930 da un velivolo, raffigurano il fronte della Cala rivolto a nord (figg. 69-70).
La ricostruzione della Cala viene proposta perché introduce problemi finora elusi, legati alla dimensione urbana della scena raffigurata.
Fino a ora abbiamo trattato la ricostruzione di singoli edifici e di un complesso architettonico usato come caso studio; in tutti i casi finora presentati, la morfologia degli artefatti permetteva di estrarre per via grafica gli elementi necessari alla determinazione dell'orientamento interno dell'immagine, dell'inclinazione dell'asse di presa e della rotazione della camera intorno a esso; in una fase successiva, la lunghezza nota di un segmento permetteva di assegnare un fattore dimensionale al modello ricostruttivo.
Le foto che utilizzeremo per la ricostruzione della Cala mettono in crisi il procedimento finora utilizzato: i fronti degli edifici occupano solo una limitata fascia orizzontale dell'immagine, le rette verticali sono visibili per brevi tratti, e lo stesso vale per le rette orizzontali (linee di gronda) che si intersecano secondo angoli noti misurabili sulla carta storica.

16 Eugenio Bronzetti (1906-1997) è stato uno dei principali protagonisti della fotografia in Sicilia nello scorso secolo. L'archivio Bronzetti è stato acquisito dalla Regione Sicilia ed è oggi custodito presso il Centro Regionale per l'Inventario, il Catalogo e la Documentazione (C.R.I.C.D.), che fa capo all'Assessorato Regionale ai Beni Culturali.

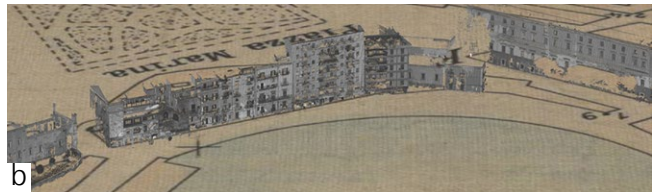
Fig. 71/ *a)* Rilievo con laser scanner del fronte della Cala. *b)* Posizionamento della nuvola di punti sulla carta O.M.I.R.A. del 1935.

Mancano altresì piani orizzontali cui riferirsi; il suolo, che presenta una leggera pendenza, non permette di riferire a un'unica quota le linee di attacco a terra degli edifici. Questo stato di cose rende ardua, se non impraticabile, l'estrazione per via grafica dell'orientamento interno ed esterno delle immagini.
La presenza di alcuni edifici, o parti di essi, sopravvissuti ai bombardamenti e rimasti *in situ*, ha permesso la sperimentazione di un procedimento che conduce alla ricostruzione dell'orientamento interno ed esterno dell'immagine a partire dalle coordinate spaziali di alcuni punti in essa raffigurati.
Si tratta, evidentemente, di una procedura del tutto simile a quella utilizzata dai software di fotogrammetria SfM, che restituiscono la posizione delle immagini e le direzioni degli assi di presa. Nel secondo capitolo abbiamo ricostruito l'orientamento esterno di un'immagine a partire dai dati estratti dal progetto fotogrammetrico; coordinate *x*, *y*, *z* del punto di presa e direzione dell'asse di presa, definita dagli angoli euleriani ω, ϕ e κ. Il software SfM utilizzato in quella sede non permette però di risalire all'orientamento di una singola immagine, date le coordinate spaziali di alcuni punti in essa raffigurati.
Questa possibilità è invece offerta da *Syntheyes*, il software commerciale per il *motion tracking* già

Fig. 72/ Il fronte della Cala. In verde gli edifici sopravvissuti ai bombardamenti e rimasti *in situ*; in rosso i punti utilizzati per il calcolo dell'orientamento dell'immagine. *a)* Foto Bronzetti del 1930. *b)* Immagine dello stato di fatto tratta da *Google Earth*. *c)* Nuvola di punti acquisita con laser scanner.

utilizzato per la visualizzazione del modello ricostruttivo della chiesa madre di Salemi. Il software, date le coordinate di almeno 6 punti riconoscibili nell'immagine, calcola l'orientamento interno ed esterno dell'immagine. Il calcolo presuppone che il punto principale si trovi nel centro geometrico del fotogramma. Nel caso delle due foto utilizzate, possiamo ipotizzare che tale condizione sia verificata: le immagini sono state digitalizzate in pieno formato ed è ragionevole ritenere che il fotografo non abbia usato camere da studio con decentramenti durante il volo. Le coordinate dei punti sono state estratte da un rilievo degli edifici rimasti in situ; al fine di utilizzare la cartografia del 1935 per il processo di restituzione, la nuvola di punti è stata riferita alla carta storica (fig. 71). Per il calcolo dell'orientamento della foto che ritrae la porzione più interna del porto, sono stati individuati i punti riconoscibili nell'immagine e nella nuvola di punti (fig. 72); questi, con le relative coordinate, sono stati inseriti e collimati.

Fig. 73/ Inserimento *trackers* e calcolo orientamento esterno. Il software calcola, per ogni *tracker*, l'errore di collimazione.

Al termine del calcolo il software riporta gli scarti fra le coordinate immagine e le coordinate spaziali dei punti. Questi valori offrono un'indicazione del livello di affidabilità generale dell'orientamento dell'immagine e della corrispondenza dei singoli punti.
Il range di errore per la foto esaminata varia dai 5 ai 45 cm (fig. 73). Le coordinate del punto di presa e gli angoli euleriani che indicano la direzione dell'asse di presa, riferiti al sistema di coordinate della nuvola di punti, hanno permesso la ricostruzione spaziale del centro e dell'asse di presa, secondo una procedura identica a quella descritta in dettaglio nel secondo capitolo. La distanza principale calcolata dal software equivale, riferita alle dimensioni della lastra di 15 x 10 cm, a circa 180 mm, un valore accettabile se si considerano le condizioni di presa e le peculiarità della scena fotografata. Il punto *V* risulta a una quota di circa 65 m sul livello del mare.
Benché la distribuzione dei punti all'interno dell'immagine non sia ottimale, in quanto concentrata nella stretta fascia orizzontale dove appaiono gli

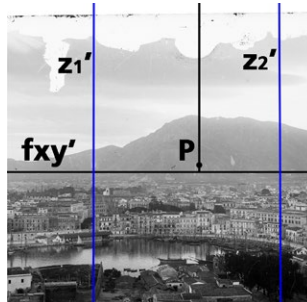
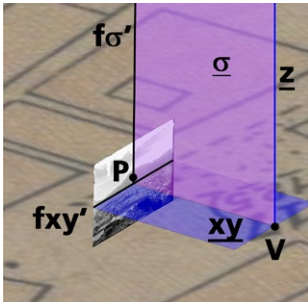



Fig. 74/ Sovrapposizione con sfumatura della fotografia e della vista vincolata dal centro di proiezione *V* della nuvola di punti per la verifica visiva della corrispondenza.

Fig. 75/ Costruzione dello schema prospettico dai dati calcolati dal software.

Fig. 76/ Tracciamento delle rette z_1' e z_2'.

edifici, la vista vincolata restituisce una buona corrispondenza fra l'immagine e la nuvola di punti degli edifici rimasti *in situ* (fig. 74).
Un'ulteriore verifica è stata eseguita utilizzando piani proiettanti; in modo del tutto analogo a quanto mostrato nel paragrafo precedente, è stato ricostruito lo schema prospettico conducendo per *V* una retta $\underline{z}$ e, per questa e il punto principale *P*, un piano $\underline{\sigma}$ che interseca π in $f\sigma'$ (fig. 75). Si tracciano adesso su π due rette che fugano in *Fz'*: la z_1', che passa per lo spigolo di un edificio rimasto *in situ* e la z_2', per lo spigolo di un edificio non più esistente (fig. 76).

Fig.77/ *a)* Tracciamento sull'immagine della retta z_1' e del punto *D'* alla sommità dell'angolo di un edificio presente *in situ*. *b)* Il piano proiettante che passa per $\underline{z}$ e z_1' interseca il piano della carta in una retta che passa per il vertice della figura di base. Anche la retta proiettante che passa per *D'* corrisponde bene alla posizione dello spigolo *D* su z_1.

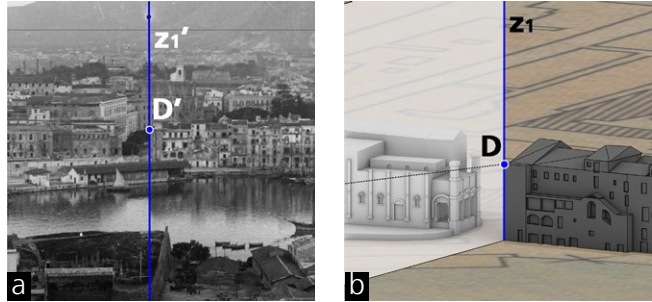



Fig. 78/ *a)* Tracciamento sull'immagine della retta z_2' e dei punti *A'* e *B'* alla sommità e alla base dell'angolo di un edificio non più esistente. *b)* Il piano proiettante per $\underline{z}$ e z_2' interseca il piano della carta in una retta che passa per il vertice della figura di base, fissando la posizione di *B*. La retta z_2 che passa per *B* interseca in *A* la seconda retta proiettante. Per *B* viene tracciata una retta r_1 che ricalca la proiezione del fronte dell'edificio e per *A* una parallela r_2.

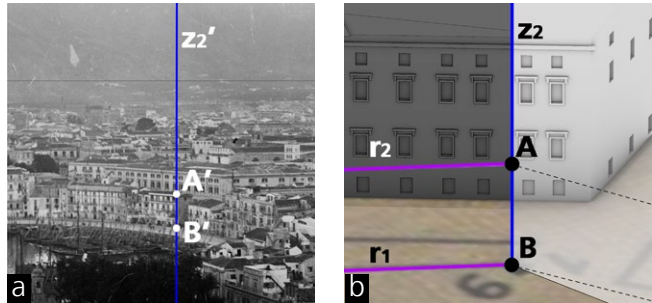



Fig. 79/ *a)* Nello schema prospettico, determinazione del punto di fuga *Fr'* all'intersezione fra il piano dell'immagine e la retta $\underline{r}$, che passa per *V* ed è parallela a r_1. *b)* Tracciamento, sull'immagine, delle rette r_1' e r_2' per i punti *A'* e *B'*.

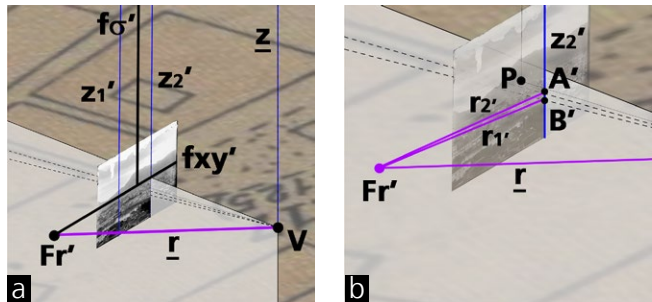



Fig. 80/ *a)* Sul piano dell'immagine, in vista vincolata, verifica della corrispondenza fra le rette r_1' e r_2' e le corrispondenti immagini della linea di gronda e di attacco al suolo dell'edificio. *b)* Ricostruzione del modello dell'edificio con rette e piani proiettanti, secondo i procedimenti già illustrati.

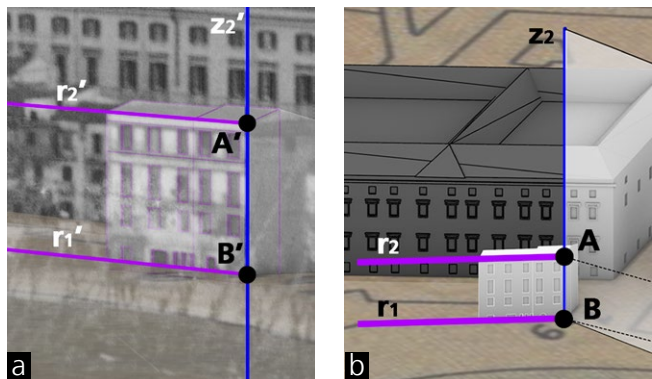
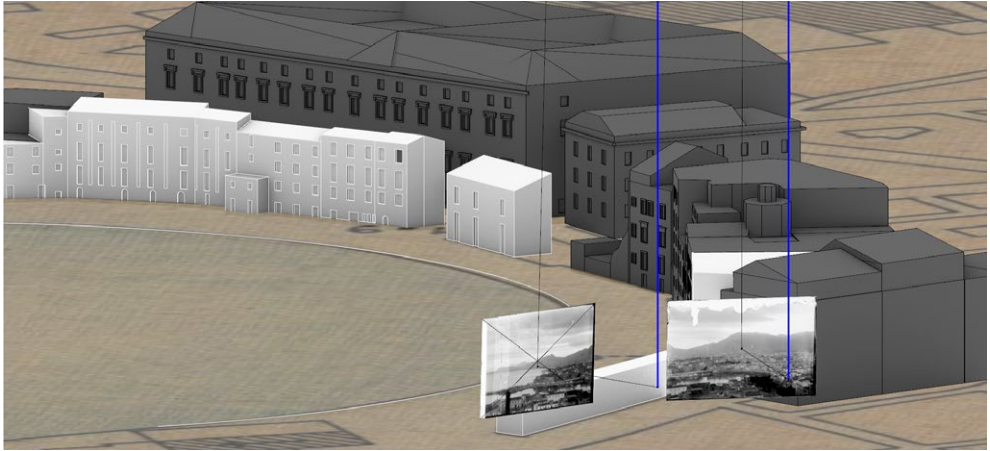
Fig. 81/ Orientamento della seconda immagine e ricostruzione della parte occidentale del fronte della Cala.

Il piano proiettante individuato da due punti di $\underline{z}$ e da un punto di z_1' mostra una buona corrispondenza con il modello costruito sulla nuvola di punti e con la cartografia; lo stesso vale per la retta proiettante che passa per *D'*, immagine dell'estremità superiore dello spigolo dell'edificio (fig. 77).
Si può dunque procedere con la restituzione degli edifici distrutti dalle bombe, ad esempio quello il cui spigolo è rappresentato, nella foto, dalla retta z_2'; anche in questo caso il piano proiettante mostra una buona corrispondenza con la carta storica, poiché esso interseca il piano a essa associato secondo una retta che passa per il vertice della planimetria corrispondente allo spigolo dell'edificio.
Tracciata per questo punto una retta z_2, si possono condurre due rette proiettanti per gli estremi dello spigolo *A'* e *B'*. Queste rette intersecano la z_2 fissando in *A* la quota al suolo e in *B* la quota della linea di gronda dell'edificio (fig. 78). Per quanto riguarda la retta orizzontale del fronte dell'edificio rivolto verso il mare, è stata condotta da *V* una retta orizzontale $\underline{r}$, parallela a r_1, proiezione del fronte sulla carta; trovato il punto di fuga *Fr'* (fig. 79), è stata verificata su π la congruenza fra la retta che passa per *A'* e l'immagine della linea di gronda (fig. 80).

Fig. 82/ Modello ricostruttivo del fronte della Cala nel 1943. In bianco gli edifici ricostruiti. In grigio scuro gli edifici rimasti *in situ*.

Il modello può quindi essere ricostruito e il procedimento può essere applicato agli altri edifici raffigurati in questa fotografia, e ampliato a includere, previo l'orientamento, anche gli edifici raffigurati nella seconda immagine (figg. 81-82).

English abstracts

Introduction

This book explores perspective restitution from photographs for the reconstruction of buildings and urban sites that no longer exist or have suffered many alterations over time.

Digital drawing and modelling tools overcome many of the limitations that, in the past, made perspective restitution from photographs inaccurate and inconvenient.

Traditional drawing tools made perspective restitution from photographs difficult, especially when vanishing points appeared at a great distance from the image frame.

The results of perspective restitution were either 1D or 2D objects, i.e. points, segments, angles, planar figures and profiles, that were revolved into the picture plane.

By contrast, digital perspective restitution can reach the furthest vanishing point; the orientation of the image can be calculated in 3D space and 3D models can be constructed with the combination of 'interpretation' lines and planes; the correspondence between 3D reconstructions and the photographic image can be checked visually by placing a virtual camera at the centre of projection.

Digital drawing tools render perspective restitution a powerful tool for scholars involved in the preservation of memory and enrichment of our knowledge of those buildings and sites that had disappeared by the second half of the 19th century, when professional photography became widespread.
From its beginning photography recorded urban scenes and monuments; for this reason photographic archives are powerful sources for the documentation of buildings and urban contexts that were either destroyed or changed in the past 150 years, due to conflicts, natural disasters, or urban renewal programs.
This book aims to explain the technique of perspective restitution and 3D reconstruction from photographs thus providing a multi-purpose tool for those interested in the study and reconstruction of buildings and urban sites that are documented by photographs alone.
As Robert Hillenbrand said in the introduction to his brief history of Islamic Art: "Specialists will have to console themselves with the thought that this book was not written with them in mind."

Perspective restitution from photographs. An historic survey

A detailed and exhaustive history of perspective restitution is the topic of a precious book published by Leonardo Paris, a teacher at the Sapienza *University in Rome, in 2000.*
The historic survey presented in this chapter is restricted to those studies that focus on perspective restitution from photographs.
The origins of photography are generally accept as starting in 1839, when a new technique that allowed practitioners to 'paint with light' was presented in France at the highest scientific and political institutions.
The first book that focuses on perspective restitution from photographs, titled La Métrophotographie*, was published sixty years later, in 1899. The word that titles the book was invented by the author himself, who was Aimé Laussedat, a teacher at the* École Polytechnique*.*
To him perspective restitution was a powerful tool for surveying both architecture and landscape.
At that time the photographic technique was still evolving and Laussedat was not sure whether perspective drawings made with the 'clear camera', an optical device frequently used by artists, was more accurate than photographs.
In the years that followed Meydenbauer, in Germany, developed a different technique , named 'Photogrammetry'.
This technique, that used the combination of two or more photographs, proved to be more accurate than perspective restitution.

This is why, when the second fundamental book on perspective restitution from photographs was published in 1930, this technique was no longer considered to be the best surveying method. The author was Henri Deneux, an architect appointed to restore the Cathedral of Reims after the WW1 damage.
Deneux stated that perspective restitution can be used for survey but, at the same time, is a powerful tool for the restitution of vanished buildings documented by a single image.
Deneux acknowledged that architecture is a privileged subject of perspective restitution as its geometric features support the retrieval of the projective entities that shape a perspective model.
His book, also titled La Métrophotographie*, is a very detailed and comprehensive manual on perspective restitution from photographs*
Throughout the 20th century perspective restitution suffered from its hybrid nature, spanning descriptive geometry and photogrammetry: scholars in descriptive geometry seldom discussed this subject because they considered perspective restitution nothing more than the inverse path of perspective drawing; scholars in topography or photogrammetry neglected perspective restitution because of its inaccuracy.
In 1964 Mario Docci, teacher at the University Sapienza *in Rome, published a book titled 'Principles of photogrammetry and perspective restitution of architecture'.*
The author presents an accurate discussion and comparison between perspective restitution, named 'elementary photogrammetry', and Meydenbauer's classic photogrammetry. Processes and devices are clearly and widely illustrated by the author.
In the 1990s perspective restitution is the subject of several studies in Computer engineering; these studies focus on the development of software tools for the semi-automatic inner and outer orientation of still images.
The studies of Paul Debevec and Frank Van den Heuel are quoted and synthetically resumed.
The last part of the chapter is dedicated to research developed by scholars in descriptive geometry that use digital drawing and modelling tools for the calculation of inner and outer orientation and for the 3D reconstruction of buildings depicted in photographs; the study published by Migliari, Fallavolita and Salvatore in 2013 has defined the workflow, the potentials and the scientific background; a contemporary study by Cabezos and Cisneros uses perspective restitution for the contextualization of restored elements and new buildings in a given context.

Perspective in photographs

In this chapter, the discussion on perspective starts from one photograph of a housing complex built in Palermo in the 1950s arranged around an inner open rectangular courtyard, terminated by a high building usually referred to as a 'skyscraper'. The courtyard has been surveyed with laser scanning and photogrammetric techniques.

The purpose of a laser scanning survey is to facilitate the construction of a 3D model of the courtyard.

Photogrammetric survey allows the comparison of inner and outer orientation automatically calculated by a computer and the corresponding data extracted with perspective restitution.

One image was selected from the photogrammetric set and its position simulated in the virtual environment of the software used for drawing and modelling; the correspondence between the image of points and their position in the 3D model of the courtyard has been checked with interpretation lines and with a virtual camera positioned at the centre of projection of the image.

The second part of the chapter introduces the geometric elements that make a perspective layout: interpretation planes and lines, vanishing points and similar features.

The third and final part shows how the geometric elements that do not belong to the picture plane can be revolved onto it, in order to retrieve the inner orientation of a photographic image by tracing lines and circles on the picture plane. The graphic reconstruction of the inner orientation illustrates some peculiar features of perspective in photographs, i.e. the convergence of vertical lines to one vanishing point; the rotation of the horizon line with respect to the image's frame; and, the correspondence between the principal distance and the focal length of the lens.

Restitution from photographs taken with standard cameras

We call 'standard' images the photographs that have been taken with regular cameras, i.e. with cameras where the relative position of lens and recording surface (sensor, film) is fixed and cannot be changed by the photographer. In standard cameras the shooting axis intersects the rectangular recording surface in its geometric centre. This point of intersection, named 'principal' point, is therefore at the centre of photos.

The perspective restitution process is then illustrated step by step. The restitution of the inner orientation of the image is developed with drawing tools on the image plane.

The description of this process takes into account the direction of the lens axis during the shooting session.
The first part illustrates the restitution from one photograph where the position of the principal point is known. The process is discussed with the aid of the image used in the previous chapter, that was taken with the shooting axis pointing upwards; in this case vertical lines converge to a vanishing point that strongly supports the retrieval of its inner orientation.
The process that leads to the calculation of inner orientation with modelling tools is illustrated as well. Both processes can be performed only if some information on the angles formed by the intersecting lines are available, no matter if these angles are straight or not.
Then the discussion focuses on photographs that do not provide any information on the position of the principal point; this is the most usual condition in perspective restitution, since operators often work with images taken from books, reshaped for editing purposes.
The last part of the chapter is dedicated to outer orientation, performed in a 3D space; a 'reverse' revolving process is therefore performed to reconstruct the 3D layout of the perspective scheme. At the end of this process the 'parallelogram' rule is used to scale the perspective layout and make restitution data measurable. This rule can be applied when the length of one segment depicted in the image is available.

Restitution from photographs taken with view cameras
Deneux explicitly refers to cameras that allow de-centrings and states that this operation permits capturing the highest parts of buildings and, at the same time, reduces the relevance of the ground in photographs of monuments.
View cameras are special cameras having the sensor and the lens connected by a flexible bellow; the part where the lens is attached is named 'front standard' and the part with the film or sensor holder is named 'rear standard'. The most used movement in architectural photographs is the rise of the front standard. Such movement causes the principal point to move downwards from the centre of the image; the rise movement allows capturing the highest part of the buildings with a horizontal shooting axis; this is why many photographs taken with view cameras show parallel vertical lines. In these circumstances, the principal point belongs to the horizon line fxy'.
One photograph of the courtyard has been taken with a view camera; the lens has been raised to frame the higher parts of the buildings while keeping vertical lines parallel.

The restitution shows that the position of the principal point has moved downwards along the vertical symmetry axis of the image.
One more photograph of the courtyard, shot in the 1960s by Italian photographer Alinari shows almost perfect parallelism of both vertical lines and of horizontal lines parallel to the short sides of the open space. In these circumstances only one vanishing point of horizontal lines can be easily detected; this point matches the principal point. The inner orientation of this image has revealed the process that leads to the retrieval of inner orientation with the use of angles made by intersecting lines that belong to a vertical plane.

Reconstructions

The restitution process is illustrated with reference to the photograph taken for this study with a view camera. We pretend that the courtyard no longer exists and that only one measurement, i.e. the distance of points A and B on a horizontal line, is available. The inner and outer orientation of the image follow the path that has been discussed in the previous chapters.
The focus of this restitution is the process that leads from the image to the object; lines and planes that make the shape of buildings are reconstructed, from their projection on the photograph, with the aid of interpretation lines and planes. The reconstructed parts are compared to the 3D model referred to the laser scanning point cloud, to evaluate deviations. As expected, deviations increase according to the distance of the pictured element from the shooting point. The restitution proceeds until a geometric connection between the part where segment $\overline{AB}$ is pictured can be established. Buildings that cannot be connected to the pavilion with the segment $\overline{AB}$, e.g. the skyscraper at the end of the courtyard, cannot be properly reconstructed. The final part of the first paragraph shows how to combine two photos for the perspective restitution of one building.
The paragraph that follows shows the reconstruction of two vanished buildings: Palazzo Grano in Messina, destroyed by the 1908 earthquake; and the mother church of Salemi in the Belice Valley of Sicily, destroyed by an earthquake in 1968. The difference between the two is given by the presence/absence of remains. Palazzo Grano and the neighbouring buildings and roads have disappeared; the reconstruction has been calculated with the aid of a measure extracted form an historic map of the town. Two images, both taken with a view camera, have been used for the reconstruction of the building’s façade. Finally, some sculptures that survived have been surveyed and positioned onto the reconstruction model to match their photographic image.

The parts of the mother church of Salemi *that have remained on site have been surveyed and the reconstruction model has referenced its original location.*
The final part of the chapter focuses on the restitution of urban sites with the aid of automatic tools for the calculation of inner orientation and with the aid of the historic map for external orientation and reconstruction.
The chosen case study is the ancient harbour of Palermo, named 'la Cala', severely damaged by bombs in 1943, during WW2. Many buildings were destroyed, but some remained in place and have been surveyed.
Two photographs taken from a plane in 1939 have been retrieved in their full format from a public archive. Since the orientation of these images with drawing tools might be hazardous, a different workflow using automatic orientation has been tested.
The commercial software that has been tested provides inner and outer orientation with the aid of the coordinates of at least six points pictured in photographs. The coordinates of corners of the surviving buildings provide an accurate orientation. The reconstruction has been performed with the aid of interpretation lines and planes combined with the historic map. Finally, the correspondence between the reconstructed buildings and their image in the photographs has been checked.

Bibliografia

Aguilera Diego. Claro-Irisarri Manuel, Gomez-Lahoz Javier. Finat Javier, Gonzalo-Tasis Margarita. "Development of a simulator for reliable and accurate 3D Reconstruction from a single view". In *International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing & Spatial Information Sciences*, vol. 35, pp. 142-147. 2004.

Arslan Ozan. "3D Object Reconstruction from a single Image". In *International Journal of Environment and Geoinformatics*, n. 1, pp. 21-28. 2014.

Cabezos-Bernal Pedro. M. Cisneros-Vivò Juan. "La restituzione fotogrammetrica 2D/3D di elementi architettonici e l'integrazione dei modelli virtuali sulle fotografie dell'intorno reale, mediante programmi CAD, software liberi e fotocamere convenzionali". In *DisegnareCon*, vol. 6, n. 12, pp. IV/1-11. 2013.

Carpiceci Marco. *La fotografia per l'architettura e l'ambiente. Documentare, riprodurre e misurare*. Fratelli Palombi Editori. Roma. 1997.

Carpiceci Marco. "Un nuovo modello grafico-analitico per l'orientamento di fotogrammi mediante l'intersezione di tre tori". In Maestri Diego e Mezzetti Carlo (a cura di). *Emergenza Rilievo*, pp. 242-252. Edizioni Kappa. Roma. 1999.

Criminisi Antonio, Reid Ian D. Zisserman Andrew. "Single view metrology". In *International Journal of Computer Vision*, 40(2), pp. 123-148. 2000.

De Luca Livio. *La fotomodellazione architettonica. Rilievo, modellazione, rappresentazione di edifici a partire da fotografie*. Flaccovio. Palermo. 2011.

De Luca Livio. Veron Philippe. Florenzano Michel. "Reverse engineering of architectural buildings based on a hybrid modeling approach". In *Computer & Graphics*, n. 30, pp. 160-176. 2006.

Debevec Paul. Taylor Camillo J. Malik Jitendra. "Modeling and Rendering Architecture from Photographs: A hybrid geometry and image-based approach". In *SIGGRAPH '96*, pp. 11-20. 1996.

Deneux Henri. *La Metrophotographie appliquée a l'Architecture*. Paul Catin Éditeur. Parigi. 1930.

Deville Édouard. *Photographic Surveying, including the elements of Descriptive geometry and perspective*. Ottawa Government Printing Bureau. Ottawa. 1895.

Docci Mario. *Principi di fotogrammetria e restituzione prospettica di architetture*. Squarci. Roma. 1964.

Docci Mario. Maestri Diego. *Manuale di rilevamento architettonico e urbano*. Laterza. Bari. 1994.

Docci Mario. Migliari Riccardo. *Scienza della Rappresentazione.* NIS. Roma. 1992.

Dzwierzynska Jolanta. "Establishing Base Elements of Perspective in Order to Reconstruct Architectural Buildings from Photographs". In *WMESS 95*, pp. 1-7. 2017.

Evans Robin (1995). *The projective Cast*. MIT Press. Cambridge (Mass.). 1995.

Fano Gaetano. *La restituzione prospettica da prospettiva razionale*. Dedalo. Bari. 1979.

Fondelli Mario. *Trattato di fotogrammetria architettonica e urbana*. Laterza. Bari. 1992.

Gómez-Gil Antonio. Ramón-Constantí Amanda. "La restitución perspective a partir da una imagen fotográfica. El palacio de Jura Real de Valencia". In *EGA Revista de expresión gráfica arquitectónica*, vol. 25, n. 40, pp. 146-155. 2020.

Grammatikopoulos Lazaros. Karras George. Petsa Elli. "Camera Calibration Combining Images with Two Vanishing Points". In *International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing & Spatial Information Sciences*, vol. XXXV, n. 5, pp. 99-104. 2004.

Gruen Armin. Remondino Fabio. Zhang Li. "Reconstruction of the great Buddha of Bamiyan, Afghanistan". In *International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing & Spatial Information Sciences*, vol. XXXIV, Part 5/W12, pp. 363-368. 2002.

Gruen Armin. Remondino Fabio. Zhang Li. "Image-based reconstruction and modeling of the great Buddha statue in Bamiyan, Afghanistan". In *International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing & Spatial Information Sciences*, vol. XXXIV, Part 5/W12, pp. 173-175. 2003.

Gruen Armin. Remondino Fabio. Zhang Li. "Photogrammetric reconstruction of the Great Buddha of Bamiyan, Afghanistan". In *The photogrammetric Record*, 19 (107), pp. 177-199. 2004.

Guanghui Wang. Hung-Tat Tsui, Zhanyi Hu. Fuchao Wu. "Camera calibration and 3D reconstruction from a single view based on scene constraints". In *Image and Vision Computing*, 23, pp. 311-323. 2005.

Lambert Johann Heinrich. *La perspective affranchie de l'embarras du plan géométral*. Heidegguer et comp. Zurich.1759.

Laussedat Aimé. *La Métrophotographie*. Gauthier-Villars, Imprimer-Libraire. Parigi. 1899.

Li-Chee-Ming Julien. Armenakis Costas. "Matching real and synthetic panoramic images using a variant of geometric hashing". In *ISPRS Annals of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, vol. IV-1/W1, pp. 199-206. 2017.

Migliari Riccardo. Fallavolita Federico. Salvatore Marta. "Monge e il problema del vertice di piramide: una applicazione alla restituzione di quote e volumi da una fotografia del 1892". In *DisegnareCon*. vol. 6, n. 12, pp. IX/1-9. 2013.

Paris Leonardo. *Il problema inverso della prospettiva*. Edizioni Kappa, Roma. 2000.

Stojakovic Vesna. Tepavcevic Bojan. "Image-based modeling approach in creating 3D morphogenetic reconstruction of Liberty Square in Novi Sad". In *Journal of Cultural heritage*, n. 12 (1), pp. 105-110. 2011.

Styliadis, Athanasios D. "Historical photography-based computer-aided architectural design: Demolished buildings information modeling with reverse engineering functionality". In *Automation in Construction*, vol. 18, pp. 51-69. 2009.

Styliadis Athanasios D. Sechidis Lazaros A. "Photography-based façade recovery & 3-d modeling: A CAD application in Cultural Heritage". In *Journal of Cultural Heritage*, Vol. 12, Issue 3, pp. 243-252. 2011.

Van den Heuel Frank A. "3D reconstruction from a single image using geometric constraints". In *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. 53, n. 6, pp. 354-368. 1998.

Van den Heuel Frank A. *Automation in Architectural Photogrammetry. Line-Photogrammetry for the Reconstruction from Single and Multiple Images*. PhD Thesis. Delft University. 2003.

Villanueva-Bartrina Lluis. *Perspectiva lineal. Su relación con la fotografía*. UPC, Barcellona. 1996.

Vinci Francesco. *Brunelleschi. Software per la restituzione prospettica assistita*. Tesi di Dottorato di Ricerca in Teoria e Storia della Rappresentazione, XIX ciclo, Università degli Studi di Catania, Facoltà di Architettura, Tutor, Prof. Giuseppe Pagnano. 2006.

Xiao-Shan Gao. Xiao-Rong Hou. Janliang Tang. Hang-Fei Cheng. "Complete solution classification for the perspective-three-point problem". In *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 25, Issue 8, pp. 930-943. 2003.

Credits

Le immagini fotografiche dei monumenti distrutti dal terremoto di Messina sono state consultate grazie alla collaborazione del Museo regionale interdisciplinare di Messina e del suo Direttore, Dott. Orazio Micali.
Le immagini fotografiche della Cala di Palermo sono state gentilmente fornite dal Centro Regionale per l'Inventario, la Catalogazione e la Documentazione dei beni culturali, grazie alla disponibilità della Direttrice Dott.ssa Laura Cappugi e all'assistenza della catalogatrice, dott.ssa Antonina Patrizia Bosco.
Il modello ricostruttivo della Cala di Palermo è stato elaborato da Giulia Agnello nell'ambito della Tesi di Laurea Magistrale in Architettura LM4 dal titolo "Tecniche digitali per la ricostruzione da fotografie di contesti urbani perduti: La Cala di Palermo", discussa presso il Dipartimento di Architettura dell'Università di Palermo nell'a.a. 2017/18, Relatore Prof. Fabrizio Agnello, Correlatore Prof. Mirco Cannella.
Il modello ricostruttivo di Palazzo Grano a Messina è stato elaborato da Claudia Barone nell'ambito della Tesi di Laurea Magistrale in Architettura LM4 dal titolo "Messina 1908: la ricostruzione della città perduta. Palazzo Grano", discussa presso il Dipartimento di Architettura dell'Università di Palermo nell'a.a. 2019/20, Relatori Proff. Fabrizio Agnello e Marco Rosario Nobile, Correlatore Prof. Mirco Cannella.
Il modello ricostruttivo della Chiesa madre di Salemi è stato elaborato da Alain Schimmenti nell'ambito della Tesi di Laurea Magistrale in Architettura LM4 dal titolo "Le città del terremoto. Tecniche di restituzione prospettica per la ricostruzione della chiesa madre di Salemi", discussa presso il Dipartimento di Architettura dell'Università di Palermo nell'a.a. 2020/21, Relatori Proff. Fabrizio Agnello e Mirco Cannella.

La restituzione prospettica è il procedimento inverso della prospettiva e affonda pertanto le proprie radici nella geometria descrittiva; quando questa tecnica viene applicata alla restituzione di misure da immagini fotografiche entra nei territori della fotogrammetria.
La collocazione al limite fra due discipline, diverse benché imparentate, ne ha determinato la solitudine; raramente menzionata negli studi di geometria descrittiva, è del tutto ignorata in quelli dedicati alla fotogrammetria.
Eppure, la restituzione prospettica è l'unico strumento che permette di ricostruire, da una singola immagine, la consistenza tridimensionale di un edificio.
Già Deneux, nel suo libro del 1930 dedicato alla 'Metrofotografia', poneva in evidenza la possibilità di ricostruire edifici interi o parti di essi danneggiati dai bombardamenti della Prima Guerra Mondiale da una sola fotografia.
Gli strumenti digitali per il disegno e la modellazione permettono di superare molte delle difficoltà che rendevano ardua la pratica della restituzione prospettica da fotografia con gli strumenti tradizionali del disegno.
Questo volume illustra i presupposti teorici e le tecniche di disegno e modellazione che permettono di giungere alla ricostruzione tridimensionale di edifici e scenari urbani non più esistenti raffigurati in una o poche immagini.

Fabrizio Agnello, architetto, PhD, professore associato di Disegno presso il Dipartimento di Architettura dell'Università di Palermo, dedica la propria attività di ricerca allo studio delle matrici geometriche e formali dell'architettura e alla ricostruzione di edifici danneggiati o perduti utilizzando tecnologie digitali di rilievo e disegno.